Vorlesung Mathematik für Physiker I
(WS 08/09)

Prof. Dr. H.-D. Donder, digitalisiert von F.Satzger

19. Februar 2009

Version 29.1

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort **6**

0.1 Allgemein 6

0.2 Über dieses Dokument 6

0.3 Lizenzierung 7

1 Mengen, Funktionen, Zahlen (14.10.2008) **8**

1.1 Allgemeines 8

1.2 Mengenoperationen 8

1.3 Spezielle Mengen 8

1.4 Summen und Produkte 9

1.5 Die vollständige Induktion 9

1.6 Binomialkoeffizienten 10

1.7 Die reellen Zahlen (16.10.2008) 11

1.7.1 Verknüpfungen 11

1.7.2 Relationen 12

1.7.3 Vollständigkeitsaxiom 13

1.7.4 Archimedisches Axiom 13
1.8 Bernoullische Ungleichung 14
1.9 Beschränkte Mengen (21.10.2008) 14
1.10 Supremum und Infimum 15
1.11 Absolutbetrag 17
1.12 Funktionen 17

2 Folgen, Grenzwerte (23.10.2008) 18
2.1 Allgemeines 18
2.2 Konvergente, divergente und beschränkte Folgen 19
2.3 Rechenregeln für Konvergenz und Grenzwerte 20
2.3.1 Addition und Multiplikation 20
2.3.2 Division (28.10.2008) 21
2.4 Monotone Folgen 22
2.5 Häufungspunkte (30.10.2008) 23

3 Reihen 26
3.1 Allgemeines 26
3.2 Folgerungen aus Folgen, Grenzwerte (23.10.2008) 26
3.3 Konvergenz von Reihen 28
3.3.1 Allgemeines 28
3.3.2 Konvergenzkriterien (06.11.2008) 29
3.3.3 Konvergenz der Umordnung 31
3.3.4 Cauchy-Produkt von Reihen 31
3.4 B-Adische Brüche (11.11.2008) 32

4 Stetigkeit 33
4.1 Definitionen 33
4.2 Folgenkriterium für Stetigkeit 34
4.3 Operationen 34
4.3.1 (13.11.2008) 35
4.4 Komposition von Funktionen 36

4.5 Zwischenwertsatz 36
4.6 Eigenschaften von Funktionen 37
4.6.1 (18.11.2008) 39
4.7 Umkehrfunktion 39
4.8 Häufungspunkte 40
4.9 Abgeschlossenheit und Kompaktheit 41
4.9.1 (20.11.2008) 42
4.10 Gleichmäßige Stetigkeit 42
4.11 Einseitige Limites 44

5 Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus (25.11.2008) 45
5.1 Potenzreihen 45
5.1.1 Konvergenz, Divergenz und Konvergenzradius 45
5.1.2 Zugehörige Funktionen 47
5.1.3 27.11.2008 48
5.1.4 Identitätssatz für Potenzreihen 49
5.2 Die Exponentialfunktion 49
5.2.1 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 49
5.3 Die Logarithmusfunktion 50

6 Differenzierbarkeit (02.12.2008) 51
6.1 Allgemeines 51
6.2 Ableitungsregeln 53
6.2.1 Ableitung von Polynomfunktionen 54
6.2.2 Kettenregel (04.12.2008) 54
6.2.3 Ableitung der Umkehrfunktion 55
6.3 Extrema 55
6.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung 56
6.4.1 09.12.08 57
6.5 Höhere Ableitung 58
6.5.1 Potenzreihen sind im Inneren differenzierbar 59
6.6 Exponentialfunktion 60

6.6.1 Ableitung des Logarithmus 61
6.6.2 11.12.08 61
6.7 Trigonometrische Funktionen 61
6.7.1 Additionstheoreme 63

7 Integrierbarkeit (16.12.2008) 64
7.1 Treppenfunktionen 64
7.2 Norm und Beschränktheit 65
7.3 Regelfunktionen 66
7.3.1 18.12.2008 68
7.3.2 Integral von Regelfunktionen 68
7.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung (8.1.2009 71
7.5 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung 72
7.6 Substitutionsregel 73
7.7 Partielle Integration 74
7.7.1 13.01.2009 75
7.8 Uneigentliche Integrale 75

8 Der Satz von Taylor, Die komplexen Zahlen 76
8.1 Taylor 76
8.2 Lagrange'sche Form des Restglieds 77
8.2.1 15.01.2009 78
8.3 Extrema bei mehrfacher Ableitung 79
8.4 Die komplexen Zahlen 79
8.4.1 20.01.2009 81
8.4.2 Eulersche Formel 81
8.4.3 Polarkoordinaten 82

9 Vektorräume 83
9.1 22.01.2009 84
9.2 Unterverktorräume 85
9.3 Der Span 86

9.4 Linearkombination, Erzeugendensysteme 87
9.4.1 27.01.2009 88
9.5 Basis 88
9.6 Austauschlemma 90
9.7 Steinerscher Austauschsatz (29.01.09) 91
9.8 Dimensionsformel 92

10 Lineare Abbildungen **93**
10.1 Eigenschaften 03.02.2009 94
10.2 Kern und Bild 95
10.3 Injektivität 96
10.4 Dimension von V 05.02.2009 98
10.5 Isomorphismus 99
10.6 Geordnete Basis 100

A Griechisches Alphabet **101**

0 Vorwort

0.1 Allgemein

Dieses Dokument wurde von F. Satzger (f.satzger@physik.uni-muenchen.de) und Maximilian Igl mit Hilfe von LaTeX 2_ε erstellt. Bei Fragen, Anregungen oder konstruktiver Kritik würde ich mich über eine Email freuen. Das Dokument ist vollständig, trotzdem könnte es eine neuere Version mit behobenen Fehlern geben. Diese können Sie ggf. unter `http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~f.satzger` finden.

0.2 Über dieses Dokument

Bei dieser Datei handelt es sich um die Mitschrift der Tafelanschriften von Prof. Dr. H.-D. Donder, LMU München, aus der Vorlesung „Mathematik für Physiker I“ im Wintersemester 08/09. Es hat keinerlei Anspruch auf Fehlerfreiheit oder Vollständigkeit. Dies gilt insbesondere für die genauere Einteilung (unterhalb der 1. Ebene), da diese aus Übersichtsgründen von mir selbst eingefügt wurde.
Desweiteren verwendet dieses Dokument folgende Abkürzungen:

- $\forall$ bedeutet „Für alle…“
- $\exists$ bedeutet „Es existiert ein…“
- $\exists!$ bedeutet „Es existiert genau ein…“
- $\mathbb{A}$ bedeutet „Annahme: …“ oder „Wir nehmen an, dass …“
- Œ bedeutet „ohne Einschränkung“
- $\Longleftrightarrow$ bedeutet „genau dann, wenn“

Versionierungsmuster: Vorlesung.Revision

0.3 Lizenzierung

1 Mengen, Funktionen, Zahlen (14.10.2008)

1.1 Allgemeines

Eine Menge wird festgelegt durch Angabe ihrer Elemente.
Beispiel: $\{1, 4, 7\}$, die leere Menge $\emptyset$, $\{n|n$ ist gerade, natürliche Zahl$\}$
Wir schreiben $a \in A$ für „a ist Element von A“.
Für $A \subseteq B$ („A ist Teilmenge von B“) genau dann wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Es gilt also: $A = B$ genau dann wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

1.2 Mengenoperationen

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \backslash B = \{x|x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Es gelten elementare Gesetze, z.B.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

Setze noch $\mathcal{P}(C) = \{A|A \subseteq C\}$ (Potenzmenge von C)

1.3 Spezielle Mengen

$\mathbb{N}$ =Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)

$\mathbb{Z}$ =Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$ =Menge der rationalen Zahlen (aller Brüche)

$\mathbb{R}$ =Menge der reellen Zahlen

Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Wir setzen das übliche Rechnen mit diesen Zahlen als bekannt voraus.

1.4 Summen und Produkte

Sind $a_m, a_{m+1}, ..., a_n \in \mathbb{R}(m \leq n)$, so setzen wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n$$

Konventionen:

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \text{ (leere Summe)}$$

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1 \text{ (leeres Produkt)}$$

1.5 Die vollständige Induktion

Ein wichtiges Beweisprinzip für $\mathbb{N}$ ist die vollständige Induktion. Diese basiert auf der folgenden Minimalität von $\mathbb{N}$: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit den beiden Eigenschaften:

(1) $0 \in A$

(2) $\forall n \in A$ gilt $n + 1 \in A$

Dann ist $A = \mathbb{N}$.
Wollen wir also zeigen, dass alle $n \in \mathbb{N}$ eine vorgegebene Eigenschaft A besitzen, so genügt es, zu zeigen:
Induktionsanfang: 0 hat die Eigenschaft A
Induktionsschritt: falls n die Eigenschaft A hat (Induktionsvoraussetzung), so hat auch n+1 die Eigenschaft A.
Dann setze $A = \{n \in \mathbb{N}|$n hat die Eigenschaft A$\}$
Dann erfüllt A die Bedingungen (1) und (2). Also ist $A = \mathbb{N}$.
Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Beweis durch Induktion nach n:
Induktionsanfang ($n = 0$): $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} \checkmark$
Induktionsschritt ($n \to n + 1$):
$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 \overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

$\square$

1.6 Binomialkoeffizienten

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Setze $\binom{n}{k}$ =Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{0, 1, ..., n-1\}$. Offenbar gilt

(1) $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

(2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(3) $\binom{n}{1} = n$ für $n \geq 1$

(4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$ (durch Betrachtung der Komplemente)

Lemma 1.1 $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Beweis: Ist $k > n$, so $\binom{n+1}{k+1} = 0 = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Sei also $k \leq n$. Sei

(1) A =Menge aller $h+1$-elementigen Teilmengen von $\{0, ..., n\}$

(2) B =Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{0, ..., n-1\}$

(3) C =Menge aller $k+1$-elementigen Teilmengen von $\{0, ..., n-1\}$

Dann gilt: $A = \{b \cup \{n\} | b \in B\} \cup C$ und $\{b \cup \{n\} | b \in B\} \cap C = \emptyset$.
Also $\binom{n+1}{k+1}$ =Anzahl von A =Anzahl von B+Anzahl von $C = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$\square$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ (n Fakultät).

Lemma 1.2 *Für $k \leq n$ gilt* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Beweis: mit Lemma 1.1 durch Induktion nach n.

$\square$

Satz 1.3 *(Binomischer Satz)*

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Beweis: durch Induktion mit Lemma 1.1.

$\square$

Insbesondere gilt aber: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ =Anzahl von $\mathcal{P}(\{0, ..., n-1\})$

1.7 Die reellen Zahlen (16.10.2008)

Wir setzen die reellen Zahlen als gegeben voraus. Alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$ lassen sich aber auf wenige Axiome zurückführen, die wir nun angeben.

1.7.1 Verknüpfungen

Wir haben auf $\mathbb{R}$ zwei Verknüpfungen, $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) und zwei ausgezeichnete Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(K0) $0 \neq 1$

(K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität von $+$)

(K2) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $x + 0 = x$ (Nullelement)

(K3) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exists\, y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$ (additives Inverses)

(K4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$ (Kommutativität von $+$)

(K5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität von $\cdot$)

(K6) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 1 = x$ (Einselement)

(K7) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt: $\exists\, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$ (Multiplikatives Inverses)

(K8) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität von $\cdot$)

(K9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot (y + z) = xy + xz$ (Distributivität)

Das Element y in (K3) ist durch x eindeutig bestimmt, denn sei $x + y = 0$ und $x + z = 0$. Dann ist

$$y \overset{(K2)}{=} y + 0 \overset{(K4)}{=} 0 + y = (x + z) + y \overset{(K4)}{=} (z + x) + y \overset{(K1)}{=} z + (x + y) = z + 0 \overset{(K2)}{=} z$$

Wir setzen $y = -x$. Außerdem schreiben wir $u - v$ für $-v + u$. Analog ist das y in (K7) durch x eindeutig bestimmt. Wir setzen $y = x^{-1}$. Außerdem schreiben wir, falls $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ für $u \cdot v^{-1}$. Schließlich schreiben wir uv statt $u \cdot v$. Die Eigenschaften (K0)-(K9) besagen, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

1.7.2 Relationen

Weiterhin haben wir auf $\mathbb{R}$ eine Relation $<$, für die gilt:

(A1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt nicht: $x < x$ (Irreflexivität)

(A2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität)

(A3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ (Totalität)

(A4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (Monotonie von $+$)

(A5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y, 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (Monotonie von $\cdot$)

Die zusätzlichen Eigenschaften besagen, dass $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist. Es folgt dann, dass $\mathbb{R}$ durch $<$ dicht geordnet ist, d.h. es gilt:
Seien $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x < z$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}$ mit $x < y < z$.
Wähle einfach $y = \frac{x+z}{2}$. (Aus Axiomen sowie $2 = 1 + 1$ folgerbar).

Wir schreiben $x \leq y$ für $x < y$ oder $x = y$.
Alle Eigenschaften, die wir bisher genannt haben, erfüllen auch die rationalen Zahlen.
Zur Charakterisierung von $\mathbb{R}$ fehlt also noch etwas Wesentliches: Dies ist das

1.7.3 Vollständigkeitsaxiom

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $A, B \neq \emptyset$ mit $a \leq b \ \forall a \in A,\ b \in B$. Dann $\exists\ x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b\ \forall a \in A, b \in B$.
Dies ist aber alles, was wir über $\mathbb{R}$ wissen. Zum Beispiel können wir das

1.7.4 Archimedisches Axiom

beweisen:

Satz 1.4 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ *mit* $x < n$.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist und führen dies zu einem Widerspruch.
Setze hierzu $B = \{b \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N} : n \leq b\}$.
Nach unserer Annahme ist $B \neq \emptyset$. Nach Definition ist aber $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall b \in B$ $n \leq b$. Aber es existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom ein $z \in \mathbb{R}$ mit $n \leq z \leq b\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall b \in B$. Dann ist $z \in B$. Aber auch $z - 1 \in B$, denn ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $n + 1 \leq z$, also $n \leq z - 1$. Somit wäre $z \leq z - 1$, was ein Widerspruch ist.

$\square$

Korollar: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$ *mit* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

<u>Beweis:</u> Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon^{-1} < n$. Dann ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\square$

Korollar: *Ist* $x > 0$, *so gibt es zu jedem* $y \in \mathbb{R}$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $y < nx$.

<u>Beweis:</u> Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{y}{x} < n$. Wegen $x > 0$ gilt $y < nx$

$\square$

1.8 Bernoullische Ungleichung

Lemma 1.5 *$\forall x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis:

I.A.:
$n = 0$:
$(1+x)^0 \geq 1 + 0x$

I.S. $n \longrightarrow n+1$:
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{\text{I.V., da}(1+x)>0}{\geq} (1+nx)\cdot(1+x) = 1+(n+1)\cdot x + nx^2 \geq 1 + (n+1)\cdot x$, da $nx^2 \geq 0$.

□

Satz 1.6 *Sei $x > 1$. Dann gibt es zu jedem y ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < x^n$.*

Beweis: Es ist $x - 1 > 0$. Nach obigem Korollar existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < n(x-1)$. Dann nach Lemma 1.5 $y < n(x-1) \leq (1+(x-1))^n = x^n$

□

Korollar: *Ist $0 < x < 1$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < \epsilon$.*

Beweis: Sei $0 < x < 1$. Dann ist $\frac{1}{x} > 1$. Ist also $\epsilon > 0$, so gibt es nach Satz 1.6 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < (\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}$.
Wegen $\varepsilon > 0$ ist dann $x^n < \varepsilon$.

□

1.9 Beschränkte Mengen (21.10.2008)

Definition: *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. A ist nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), wenn es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a \leq s$ (bzw. $s \leq a$) $\forall a \in A$. Solch ein s heißt dann obere (bzw. untere) Schranke von A.*
A ist beschränkt, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 1.7 *Sei $A \subseteq \mathbb{Z}$ nichtleer und nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt). Dann besitzt A ein größtes Element (bzw. ein kleinstes Element).*

Beweis: Sei $a_0 \in A$. Setze $A_0 = \{a \in A | a_0 \leq a\}$. Da A nach oben beschränkt ist, ist A_0 endlich. Somit besitzt A_0 ein größtes Element. Dieses ist aber dann das größte Element von A. (Der andere Fall geht analog.)

□

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 1.4 existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-x \leq n$. Also ist $-n \leq x$. Somit ist $A = \{a \in \mathbb{Z} | a \leq x\} \neq 0$ und natürlich nach oben beschränkt.
Wir können also nach Satz 1.7 definieren:
$[x]$ = das größte Element von A (Gauß-Klammer)
Es gilt dann $[x] \leq x \leq [x] + 1$ und $[x] \in \mathbb{Z}$. Hiermit zeigen wir, dass die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen.

Satz 1.8 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$.*

Beweis: Nach Korollar zu Satz 1.4 $\exists\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ mit $\frac{1}{n} < y - x$.
Setze $p = [nx]$. Also $p \in \mathbb{Z}$ und $p \leq nx < p + 1$. Somit $x < fracp + 1n = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$ und $\frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$.

□

1.10 Supremum und Infimum

Definition: *Seien $A \subseteq \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$. s ist das Supremum von A, wenn s die kleinste obere Schranke von A ist. s ist das Infimum von A, wenn s die größte untere Schranke von A ist.*

s ist also das Supremum von A, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\forall a \in A$ gilt $a \leq s$

(2) Ist $r < s$, so $\exists\, a \in A$ mit $r < a$

Falls das Supremum (bzw. Infimum) von A existiert, bezeichnen wir es mit $\sup A$ (bzw. $\inf A$).

Beispiel: Sei $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$. Dann $\inf A = 0$, denn:

(1) $0 \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$

(2) Ist $\epsilon > 0$, so existiert $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$

Beispiel: $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Dann ist $\inf A = 0, \sup A = 1$. Aus dem Vollständigkeitsaxion erhalten wir

Satz 1.9 *(a) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum*

(b) Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum

Beweis: Zu (a): Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Dann ist $B = \{b \in \mathbb{R} | b$ ist obere Schranke von $A\} \neq \emptyset$. Nach Definition gilt dann $a \leq b \ \forall a \in A, b \in B$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom $\exists\ s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b \ \forall a \in A, b \in B$. Dann ist offenbar s das Supremum von A. Beweis (b) analog.

□

Als Anwendung hiervon kann man zeigen:

Zu jedem $b \geq 0 \ \exists!\ a \geq 0$ mit $a^2 = b$ (Dieses a bezeichnet man mit $\sqrt{b}$). Die Eindeutigkeit ist klar.

Zur Existenz: Setze $D = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq b\}$. D ist nach oben beschränkt. Sei also $a = \sup D$. Dann $a^2 = b$.

Definition: *Sei $a \in \mathbb{R}$. a ist irrational, wenn $a \notin \mathbb{Q}$.*

Bemerkung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Sei $a = \sqrt{2}$. $\mathbb{A}$ $a \in \mathbb{Q}$. Wegen $a > 0 \ \exists\ p, q \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{p}{q}$ und p, q sind teilerfremd. Dann gilt $2 = a^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Somit ist p^2 gerade und daher auch p gerade. Sei also $p = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $2q^2 = p^2 = 4k^2$ also $q^2 = 2k^2$. Somit ist q^2

gerade und daher auch q gerade. Dann ist aber 2 ein gemeinsamer Teiler von p, q, was ein Widerspruch zur Wahl der beiden ist.

$\square$

1.11 Absolutbetrag

Definition: *Für $a \in \mathbb{R}$ sei* $|a| = \begin{cases} a, & \textit{falls } a \geq 0 \\ -a, & \textit{falls } a < 0 \end{cases}$

Offenbar gilt dann $|a| \geq 0$ und $|-a| = |a|$. Weiterhin ist $|a| = \sqrt{a^2}$.

Satz 1.10 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(4) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

Beweis: (1) und (2) sind klar. Zu (3): Wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ ist $x + y \leq |x| + |y|$ Wegen $-x \leq |x|$ und $-y = |y|$ ist $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. Insgesamt also $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Zu (4): $|x| = |(x + y) - y| \underset{(3)}{\leq} |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$. Also $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

$\square$

Bemerkung: $|x - y|$ ist der Abstand der Punkte x, y.

1.12 Funktionen

Definition: *Eine Funktion (oder Abbildung) f von einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Wir schreiben hierfür $f : A \to B$ („f ist Funktion von A und B“). A ist der*

Definitionsbereich von f.
Für A, B sei $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ das kartesische Produkt.
Für $n \geq 1$ sei $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_1, \ldots, a_n \in A\}$ (n-Tupel).
Ist $f : A \to B$, so sei $Graph(f) = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ der Graph von f. Also $Graph(f) \subseteq A \times B$.
Weiterhin sei für D, E

$$f[D] = \{f(a) | a \in A \cap D\} \text{ „Bild von D unter f"}$$

$$f^{-1}[E] = \{a \in A | f(a) \in E\} \text{ „Urbild von E unter f"}$$

2 Folgen, Grenzwerte (23.10.2008)

2.1 Allgemeines

Definition: *Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ $a_n = f(n)$ und schreiben f in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Die a_n sind die Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. a ist Grenzwert (Limes) von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn gilt
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; m \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq m$.

Lemma 2.1 *Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Seien a, a' Grenzwerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $|a - a'| < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$. Hieraus folgt $a = a'$. Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen a Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\exists \; m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq m_0$. Wegen a' Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\exists \; m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq m_1$. Setze $m = \max\{m_0, m_1\}$. Dann $|a - a'| = |(a - a_m) + (a_m - a')| \leq |a - a_m| + |a_m - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\square$

2.2 Konvergente, divergente und beschränkte Folgen

Ist also a Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so können wir setzen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wir sagen dann auch der Grenzwert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Wir schreiben hierfür auch manchmal $a_n \to a$. Besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Andernfalls ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Beispiel:

(1) Sei $b \in \mathbb{R}$ und $a_n = b \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Beweis: Sei $\varepsilon = 0$. Dann ist sogar $|a_n - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar zu Satz 1.4 existiert dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Dann gilt aber $\forall n \geq m$: $|\frac{1}{n+1} - 0| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1} < \varepsilon$.

$\square$

(3) Sei $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Beweis: $\mathbb{A}$ a ist Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \; \forall n \geq m$. Also speziell $2 = |a_{m+1} - a_m| \leq |a_{m+1} - a| + |a - a_m| < 1 + 1 = 2$

Dies ist ein Widerspruch.

$\square$

Definition: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, wenn ein c existiert mit $|a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$.*

Satz 2.2 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann existiert insbesondere ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \; \forall n \geq m$. Für $n \geq m$ ist aber

$|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1$

Setze $c = \max\{|a| + 1, |a_0|, \cdots, |a_{m-1}|\}$. Dann ist $|a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$.

□

2.3 Rechenregeln für Konvergenz und Grenzwerte

2.3.1 Addition und Multiplikation

Satz 2.3 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann sind auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Seien $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wir zeigen zuerst $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\ m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq m_0$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq m_1$. Setze $m = \max\{m_0, m_1\}$. Dann ist aber $\forall n \geq m$:
$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$
Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$: Nach Satz 2.2 ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit $\exists\ c > 0$ mit $|a_n| \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir können dabei c so wählen, dass auch $|b_n| \leq c$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\ m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}\ \forall n \geq m_0$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2c}\ \forall n \geq m_1$. Setze $m = \max\{m_0, m_1\}$. Dann gilt $\forall n \geq m$:
$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \leq c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c = \varepsilon.$

□

Korollar: *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wähle $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Folgen $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt:*
$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Seien wieder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wir zeigen zuerst $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$. Setze hierzu für $n \in \mathbb{N}$ $c_n = c$. Nach Beispiel 1 konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Also nach Satz 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = ca$. Insbesondere: $\lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = -b$ und daher nach Satz 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

□

Beispiel:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}(3 \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{1+n}) = 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

2.3.2 Division (28.10.2008)

Bei Quotienten von Folgen benutzen wir folgende Konvention: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, falls

(a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{a_n}{b_n} - c| < \varepsilon\ \forall n \geq m$

Nach dieser Konvention gilt z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Definition: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Nullfolge, wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 2.4 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Weiterhin sei $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Beweis: Wegen Satz 2.3 genügt es, dies für den Fall $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, denn $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$. Wir müssen zuerst zeigen, dass ein n_0 existiert, mit $b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$. Dann existiert aber n_0 mit $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}\ \forall n \geq n_0$. Dann ist n_0 wie gewünscht. Außerdem gilt für $n \geq n_0$ sogar $|b_n| > \frac{|b|}{2}$, also $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|}{2}\ \forall n \geq m$. (Konvergenzbedingung). Für $n \geq \max\{n_0, m\}$ gilt dann
$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b-b_n}{b_n b}| = \frac{1}{|b \cdot b_n|}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon.$

$\square$

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+9n}{n^2-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+\frac{9}{n}}{1-\frac{5}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{4+0}{1-0\cdot 0} = 4.$

Satz 2.5 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Setze $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.
$\not\exists$ $b < a$. Dann ist $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Also gibt es $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq m_0$ und $|b_n - b| < \varepsilon \; \forall n \geq m_1$. Setze $m = \max\{m_0, m_1\}$. Dann gilt also insbesondere, dass $a_n > a - \varepsilon$ und $b_n > b - \varepsilon$. Aber nach Wahl von ε ist $a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon$. Damit wäre aber $a_n > b_n$. Dies ist ein Widerspruch zu $a_n \leq b_n$.

$\square$

Korollar: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge, und seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq a_n \leq d \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $c \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq d$.*

2.4 Monotone Folgen

Definition: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist*

- *monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *monoton fallen, wenn $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *monoton, wenn sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.*
- *streng monoton, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Satz 2.6 *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.
Sei zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsen. Setze $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist A beschränkt, hat also ein Supremum. Sei $a = \sup A$. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Also $\exists\; m \in \mathbb{N}$

mit $a-\varepsilon < a_m$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und a obere Schranke von A ist, gilt $\forall n \geq m$, dass $a-\varepsilon < a_m \leq a_n \leq a$, also $|a_n - a| < \varepsilon$. Dies liefert den Beweis im ersten Fall.
Ist aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallen, so ist $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, also konvergent nach dem ersten Fall. Dann ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

$\square$

Definition: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n(k)_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann nennt man die Folge eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beispiel: $(\frac{1}{3n(k)+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{n+1}{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 2.7 *Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Ein $n \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt, wenn $a_n > a_m\ \forall m > n$.
1. Fall: unendlich viele Gipfelpunkte: Seien dann $n(0) < n(1) < \cdots$ sämtliche Gipfelpunkte. Dann ist $a_{n(0)} > a_{n(1)} > \cdots$, d.h. die Folge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine streng monoton fallende Teilfolge. 2. Fall: endlich viele Gipfelpunkte: Wir definieren rekursiv: $n(0) < n(1) < \cdots$ mit $a_{n(0)} \leq a_{n(1)} \leq \cdots$. Wähle $n(0)$ so, dass $n < n(0)$ für alle Gipfelpunkte. Sei $n(k)$ so konstruiert, dass insbesondere gilt: $n(0) \leq n(k)$. Dann ist $n(k)$ kein Gipfelpunkt. Also $\exists m > n(k)$ mit $a_{n(k)} \leq a_m$. Setze $n(k-1) = n$. Somit ist in diesem Fall $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

2.5 Häufungspunkte (30.10.2008)

Definition: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele n gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon$*

Beispiel:

(1) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die beiden Häufungspunkte 1 und -1.

(2) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

Lemma 2.8 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.*

Beweis:
Sei a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir konstruieren rekursiv $n(0) < n(1) < \cdots$, sodass gilt $|a_{n(k+1)} - a| < \frac{1}{k+1}$. Setze $n(0) = 0$. Sei $n(k)$ schon konstruiert. Da a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es unendlich viele n mit $|a_n - a| < \frac{1}{k+1}$. Also $\exists\ n$ mit $n > n(k)$ und $|a_n - a| < \frac{1}{k+1}$. Setze $n(k+1) = n$. Die Teilfolge $(a_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert aber offenbar gegen a, denn ist $\varepsilon > 0$, so wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Dann ist aber für $k \geq m$ $|a_{n(k)} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$.
Sei umgekehrt $(a_{n(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n(k)} - a| < \varepsilon\ \forall k \geq m$. Somit gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Also ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Satz 2.9 *(Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Satz 2.7 besitzt diese Folge eine monotone Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese ist natürlich auch beschränkt. Somit ist sie nach Satz 2.6 konvergent. Ihr Grenzwert ist nach Lemma 2.8 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Definition: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, wenn gilt:*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N}$ *mit* $|a_n - a_k| < \varepsilon\ \forall k, n \geq m$.

Satz 2.10 *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wir müssen zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Setze $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei also $\varepsilon > 0$. $\exists\ m \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq m$. Dann gilt $\forall k, n \geq m$: $|a_n - a_k| \leq |a_n - a + a - a_k| = |a_n - a| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Sei nun umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir müssen zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass die Folge beschränkt ist. Es existiert also ein m mit $|a_n - a_k| < 1\ \forall n, k > m$. Dann ist $|a_n| < |a_m| + 1\ \forall n \geq m$. Also ist die Folge beschränkt. Somit besitzt sie nach Satz 2.9 einen Häufungspunkt a. Wir zeigen, dass a der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall k, n \geq m$. Da a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, $\exists k \geq m$ mit $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit gilt $|a_n - a| \geq |a_n - a_k| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n \geq m$.

$\square$

Wir führen noch 2 Endpunkte $+\infty$ und $-\infty$ von $\mathbb{R}$ ein. Hierfür setzen wir fest $-\infty < a < \infty \forall a \in \mathbb{R}$. Setze $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definition: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn gilt:*
$\forall c \exists m$ mit $c < a_n \forall n \geq m$
(bzw. $\forall c \exists m$ mit $c > a_n \forall n \geq m$).
Ist dies der Fall, so schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Beispiel:

(1) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞

(2) $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$

Bemerkung: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ In beiden Fällen $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geq m$. Also $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon\ \forall n \geq m$.

$\square$

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$, so schreiben wir auch

1. $\sup A = \infty$ für „A ist nicht nach oben begrenzt.“

2. $\inf A = -\infty$ für „A ist nicht nach unten begrenzt.“

3 Reihen

3.1 Allgemeines

Definition: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet, und die Reihe heißt konvergent. Man nennt diesen Grenzwert auch die Summe der Reihe. Analog definiert man $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$.*

(04.11.2008)

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Beweis: Wir zeigen zuerst durch Induktion, dass für $n \geq 1$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Induktionsanfang ($n = 1$): $\frac{1}{1\cdot(1+1)} = 1$ ✓

Induktionsschritt ($n \to n+1$): $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)\cancel{^2}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ ✓

Nun ist aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 1$. Also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

□

3.2 Folgerungen aus Folgen, Grenzwerte (23.10.2008)

Viele Sätze über Folgen übertragen sich auf Reihen. So liefern die Rechenregeln für Folgen sofort:

Seien 2 konvergente Reihen gegeben: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$

Sehr nützlich ist auch die folgende Beobachtung: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Ist $a_k \geq 0 \forall k$, so ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ monoton wachsend. Um zu zeigen, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, genügt es also, hier zu zeigen, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.
Beweis: $\forall n \geq 1$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\frac{n}{n+1} \leq 2$

$\square$

Weiterhin liefert das Cauchy-Kriterium für Folgen das folgende Ergebnis für Reihen: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe

(1) Es gelte die folgende Bedingung: $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq j \geq m\ |\sum\limits_{k=j+1}^{n} a_k| < \varepsilon$.

Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

(2) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|\sum\limits_{k=j+1}^{n} a_k| < \varepsilon\ \forall n \geq j \geq m$. Denn es ist ja für $n \geq j \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{j} = \sum\limits_{k=j-1}^{n} a_k$. Insbesondere ist also für eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Die letztere Bedingung ist aber nicht hinreichend für die Konvergenz.
Beispiel: Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.
Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{-viele}}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \frac{n}{2}$$

3.3 Konvergenz von Reihen

3.3.1 Allgemeines

Satz 3.1 *(Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.

Beweis: Setze $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:
$s_{2n+1} \leq s_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+3})}_{\geq 0} = s_{2n+3} \leq s_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}$. Also ist die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt. Beide Folgen sind aber konvergent. Seien also $c = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$ und $d = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Dann gilt $d - c = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, d.h. $c = d$. Somit ist aber offensichtlich $c = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, also $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.

□

Beispiel: Die alternierend harmonische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ist konvergent.

Satz 3.2 *(Geometrische Reihe)*
Sei $|x| < 1$. Dann gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x_k = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k - \sum\limits_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 - x^{n+1}$. Also wegen $x \neq 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Wegen $|x| < 1$ ist aber $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Definition: *Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ konvergent ist.*

Beispiel: Die alternierend harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.3 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Wir zeigen das Cauchy-Kriterium für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ Dann $\exists m$ mit $\forall n \geq j \geq m$ $\sum\limits_{k=1+j}^{n} a_k < \varepsilon$. Aber $|\sum\limits_{k=j+1}^{n}| \leq \sum\limits_{k=j+1}^{n} |a_k|$. Somit ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

□

Sei $k \geq 1$. Bekanntlich existiert für $b \geq 0$ genau 1 $a \geq 0$ mit $a^k = b$. (Wir werden das später beweisen.) Wir nennen das $a = \sqrt[k]{b}$ (k-te Wurzel aus b). Es ist $\sqrt[k]{b_1 \cdot b_2} = \sqrt[k]{b_1} \cdot \sqrt[k]{b_2}$.

3.3.2 Konvergenzkriterien (06.11.2008)

Satz 3.4 *(Konvergenzkriterien)*
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe.

(a) (Majorandenkriterium)
Es gebe eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \leq c_k \ \forall k \geq k_0$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(b) (Quotientenkriterium)
Es gebe ein $0 \leq q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q \ \forall k \geq k_0$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(c) (Wurzelkriterium)
Es gebe ein $0 \leq q < 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \ \forall k \geq k_0$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis:
zu (a): Nach früherer Bemerkung genügt es zu zeigen, dass die Folge $(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ beschränkt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ ist aber $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| = \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \sum\limits_{k=k_0}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \sum\limits_{k=k_0}^{n} c_k \leq \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} c_k$.

$\square$

zu (b): Für $k \geq k_0$ ist $\frac{|a_k|}{|a_{k_0}|} = \frac{|a_{k_0+1}|}{|a_{k_0}|} \cdot \frac{|a_{k_0+2}|}{|a_{k_0+1}|} \cdot \frac{|a_k|}{|a_{k_0-1}|} \leq q^{k-k_0}$, d.h. $|a_k| \leq |a_{k_0}| \cdot q^{k-k_0}$. Aber $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} |a_{k_0}| q^{k-k_0}$ konvergent nach Satz 3.2. Somit ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nach (a) absolut konvergent.

$\square$

zu(c): Es ist für $k \geq k_0$ $|a_k| \leq q^k$. Somit folgt die Behauptung wie in (b).

$\square$

Korollar: *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Beweis: Sei zuerst $p = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$. Setze dann $q = p + \varepsilon$ mit $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$. Also ist $0 \leq q < 1$. Nun existiert aber $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \forall k \geq k_0$. Also folgt nach dem Quotientenkriterium, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist. Im 2. Fall folgt die Behauptung analog aus dem Wurzelkriterium.

$\square$

Beispiel: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konvergiert absolut, denn: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2^k}{2^{k+1} \cdot k^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k})^2 = \frac{1}{2}$.
Manchmal liefert aber sowohl das Quotientenkriterium als auch das Wurzelkriterium keine Antwort, obwohl Konvergenz vorliegt.
Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Aber $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}^2 = 1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2}} = 1$.

Definition: *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion mit $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists! k \in \mathbb{N}$ mit $\tau(k) = m$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$ eine Umordnung von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine Umordnung besteht also aus denselben Gliedern, nur in einer anderen Reihenfolge.*

3.3.3 Konvergenz der Umordnung

Satz 3.5 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe mit dem Grenzwert a. Dann konvergiert jede Umordnung von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ebenfalls gegen a.*

Beweis: Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall m \in \mathbb{N} \exists! k \in \mathbb{N}$ mit $\tau(k) = m$. Wir zeigen, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = a$. Sei hierzu $a > 0$. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, existiert ein m_0 mit $\forall n \geq j \geq m_0 \ \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{\varepsilon}{2}$. Nun wählen wir m so groß, dass $\{0, \cdots, m_1\} \subseteq \{\tau(0), \cdots, \tau(m)\}$. Für $n \geq m \ \exists m_2, \cdots, m_l$ mit $m_1 < m_2 < \cdots < m_l$ und $\{\tau(0), \tau(1), \cdots, \tau(n)\} = \{0, 1, \cdots, m_1, m_2, \cdots, m_l\}$. Somit $|\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\tau k} - \sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k| = |\sum\limits_{j=2}^{l} a_{m_j}| \leq \sum\limits_{j=2}^{l} |a_{m_j}| \leq \sum\limits_{k=m_2}^{m_l} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daher gilt für $n \geq m :\ |a - \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}| \leq |a - \sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k| + |\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

□

Bemerkung: Die Vorraussetzung in Satz 3.5, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, ist notwendig. Es gibt eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die nicht konvergiert:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{7})}_{\geq \frac{1}{4}} - \tfrac{1}{6} + \underbrace{(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15})}_{\geq \frac{1}{4}} - \tfrac{1}{8} + (\cdots)$$

$$+ \underbrace{(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1})}_{\geq \frac{1}{4}} - \tfrac{1}{2^{n+2}}.$$

3.3.4 Cauchy-Produkt von Reihen

Ohne Beweis:

Satz 3.6 *(Cauchy-Produkt von Reihen)*
Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *seien absolut konvergent. Für* $k \in \mathbb{N}$ *setze* $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$. *Dann ist auch* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und es gilt* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k)$.

3.4 B-Adische Brüche (11.11.2008)

Für $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, sei $a^{-n} = (a^{-}1)^n$. Setze noch $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} | a \geq 0\}$ =Menge der positiven reellen Zahlen.

Definition: *Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Ein <u>b-adischer Bruch</u> ist eine Reihe der Gestalt $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^{-k}$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}, k_0 \leq 0$, und $a_{k_0} \neq 0$, sowie $a_k \in \mathbb{N}, 0 \leq a_k \leq b \ \forall k \geq k_0$.*
Für $b = 10$ spricht man von <u>Dezimalbrüchen</u>. Ein Dezimalbruch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ wird üblicherweise geschrieben als $a_{k_0} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3$.
Ist $a = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^{-k}$, o sagen wir „$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^{-k}$ stellt a dar.“.

Satz 3.7 *Jeder b-adische Bruch stellt eine reelle Zahl dar.*

<u>Beweis:</u> Sei $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^{-k}$ ein b-adischer Bruch. Es genügt zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$ konvergent ist. Aber $\forall k$ gilt: $0 \leq a_k b^{-k} \leq b \cdot b^{-k} = b^{-k+1}$. Also ist die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b^{-k+1}$ eine Majorante.

□

Die Darstellung als b-adischer Bruch ist bekanntlich nicht eindeutig. So ist zum Beispiel: $1,000 \cdots = 0,999 \cdots$.

Definition: *Wir sagen: Ein b-adischer Bruch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b^{-k}$ ist normiert, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele k.*

Man kann dann zeigen:

Satz 3.8 *Jede reelle Zahl lässt sich durch genau einen normierten b-adischen Bruch darstellen.*

4 Stetigkeit

4.1 Definitionen

Wir untersuchen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Meistens ist dabei D ein Intervall.
Diese werden wie folgt definiert: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Wir setzen

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ (offenes Interval)
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \geq x < b\}$ (halboffenes Interval)
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \geq b\}$ (halboffenes Interval)
5. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$ (uneigentliches Interval)
6. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$ (uneigentliches Interval)
7. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ (uneigentliches Interval)
8. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ (uneigentliches Interval)
9. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (uneigentliches Interval)

Außerdem sei noch für $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ die ε−Umgebung von a. Es ist also $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - a| < \varepsilon\}$.
Ist im Folgenden $f : D \to \mathbb{R}$, so ist immer $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$.*

(1) f ist stetig im Punkt a, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \ \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

(2) f ist stetig, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Es gilt also: f ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $f[U_\delta(a)] \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.

Beispiel:

(1) Die Identität $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $id(x) = x$ ist stetig, denn sei $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Wähle einfach $\delta = \varepsilon$.

(2) Jede konstante Funktion ist stetig, denn sei etwa $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) - f(a) = 0 \ \forall a, x \in \mathbb{R}$. Sind also $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so können wir $\delta > 0$ beliebig wählen.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = [x](= max\{z \in \mathbb{Z} | z \leq x\})$. f ist nicht stetig in 1. Denn wähle etwa $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$. Setze $b = \min\{\frac{\delta}{2}; \frac{1}{2}\}$. Dann ist $f(1 - b) = 0$. Also $|f(1 - b) - (1)| = 1$ obwohl $|(1 - b) - 1| = b < \delta$.

4.2 Folgenkriterium für Stetigkeit

Satz 4.1 *(Folgenkriterium für Stetigkeit)*
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $a \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Beweis: Sei zuerst $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Wir müssen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ zeigen. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wegen f stetig in a $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \ \forall x \in D, |x - a| < \delta$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ \exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta \ \forall n \geq m$. Dann ist $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \ \forall n \geq m$.
Die andere Richtung zeigen wir indirekt. Sei also f nicht stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall \delta > 0 \ \exists x \in D, |x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Somit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Offenbar konvergiert dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. Damit ist die Bedingung auf der rechten Seite nicht erfüllt.

$\square$

4.3 Operationen

Wir definieren nun arithmetische Operationen auf Funktionen. Seien hierzu $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

Definition: $f + g, f - g, f \cdot g, cf : D \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

$\forall x \in D$ Schließlich setze noch $D' = \{x \in D || g(x) \neq 0\}$ und definiere $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ durch $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \in D'$.

Satz 4.2 *Sind die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig und ist $c \in \mathbb{R}$, so sind noch die Funktionen $f+g, f-g, f \cdot g, cf$ in a stetig. Ist zusätzlich $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in a stetig.*

Beweis: Dies folgt sofort aus den entsprechenden Eigenschaften für Folgen und dem Folgenkriterium für Stetigkeit.
Zum Beispiel für $f+g$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus D, die gegen a konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. Also $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = (f+g)(a)$.

$\square$

4.3.1 (13.11.2008)

Mit unseren früheren Beispielen als Ausgangsfunktionen erhalten wir viele stetige Funktionen. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f ist eine Polynomfunktion, wenn es $a_0, \cdot, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, mit $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i \; \forall x \in \mathbb{R}$. Da konstante Funktionen und die Identität stetig sind, ist nach Satz 4.2 jede Polynomfunktion stetig. Eine Funktion f ist eine rationale Funktion, wenn Polynomfunktionen g, h existieren mit $f = \frac{g}{h}$. Nach Satz 4.2 ist also auch jede rationale Funktion stetig.

4.4 Komposition von Funktionen

Definition: *(Komposition von Funktionen) Seien $f : a \to b$ und $g : C \to D$ Funktionen, ud es gelte $f[A] \subseteq C$. Dann wird $g \circ f : A \to D$ definiert durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))\ \forall a \in A$.*

Satz 4.3 *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f[D] \subseteq E$, wobei $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion f sei in $a \in D$ stetig und g sei in $f(a)$ stetig. Dann ist $(g \circ f)$ in a stetig.*

Beweis: Mit Folgenkriterium. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Wegen f stetig in a gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Wegen g stetig in $f(a)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

$\square$

Beispiel: Die Funktion $abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $abs(x) = |x|$ ist stetig, denn $\forall a, x \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |a|| \leq |x - a|$. Für $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir $|f| : D \to \mathbb{R}$ durch $|f|(x) = |f(x)|$ für $x \in D$. Ist dann f stetig, so ist auch $|f|$ stetig, denn es gilt $|f| = abs \circ f$.

4.5 Zwischenwertsatz

Satz 4.4 *(Zwischenwertsatz)*
Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $d \in \mathbb{R}$, welcher zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Dann $\exists c \in [a; b]$ mit $f(c) = d$.

Beweis: Sei Œ$f(a) \leq d \leq f(b)$. Sonst betrachte $-f$. Wir benutzen die Interval-Halbierungsmethode. Hierzu definieren wir rekursiv eine Folge $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

(2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$

(3) $f(a_n) \leq d \leq f(b_n)$

Rekursionsanfang: Setze $[a_n, b_n] = [a, b]$.

Rekursionsschritt: Sei $r = \frac{a_n+b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$. Nun können 2 Fälle auftreten:

1. Fall: $f(r) \geq d$: Dann setze $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, r]$.

2. Fall: $f(r) < d$: Dann setze $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [r, b_n]$.

Somit bleiben (1)-(3) erhalten. Dann ist aber wegen (1) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallen beschränkt. Also sind beide Folgen konvergent. Wegen (2) ist $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Sei $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Natürlich ist $c \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f und (3) folgt dann $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \underset{(3)}{\leq} d \underset{(3)}{\leq} \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$. Also ist $f(c) = d$.

$\square$

Korollar: *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f[I]$ ein Intervall.*

Beweis: Sei $J = f[I]$. Es genügt zu zeigen (!): Sind $s, t \in J, s < t$, und $s < d < t$, so ist $d \in J$.

Seien also $s, t \in J, s < t$ und $s < d < t$. Dann $\exists a, b \in I$ mit $f(a) = s$ und $f(b) = t$. Dann ist $a < b$ oder $b < a$. Sei etwa $a < b$. Da I ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subseteq I$. Die Einschränkung von f auf $[a, b]$ ist aber stetig. Somit existiert nach dem Zwischenwertsatz $c \in [a, b]$ ist $f(c) = d$. Also $d \in J$.

$\square$

Als Anwendung kann man zeigen: Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Dann $\forall b \geq 0\ \exists a \geq 0$ mit $a^k = b$. (sh. Übung für $k = 3$)

4.6 Eigenschaften von Funktionen

Definition: *Sei $f : A \to B$ eine Funktion:*

- *f ist injektiv, wenn gilt: $\forall a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ ist auch $f(a_1) \neq f(a_2)$*

- *f ist surjektiv, wenn $f[A] = B$, d.h. $\forall b \in B \; \exists a \in A$ mit $f(a) = b$*
- *f ist bijektiv, wenn es sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Beispiel:

(1) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 1$ ist bijektiv.

(2) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv, denn $g(-1) = g(1)$ und $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) \neq -1$.

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$*

- *f ist monoton wachsend, falls $f(a) \leq f(b)$ $\forall a, b \in D$ mit $a \leq b$.*
- *f ist streng monoton wachsend, falls $f(a) < f(b)$ $\forall a, b \in D$ mit $a < b$.*
- *f ist monoton fallend, falls $f(a) \geq f(b)$ $\forall a, b \in D$ mit $a \leq b$.*
- *f ist streng monoton fallend, falls $f(a) > f(b)$ $\forall a, b \in D$ mit $a < b$.*
- *f ist monoton, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist.*
- *f ist streng monoton, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Bemerkung: Jede streng monotone Funktion ist injektiv.

Satz 4.5 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion. Dann ist f streng monoton.*

Beweis: Es genügt, zu zeigen, dass $\forall a, b \in I$ mit $a < b$ f eingeschränkt auf $[a, b]$ streng monoton ist. Seien also $a, b \in I$ mit $a < b$. Wegen f injektiv ist $f(a) \neq f(b)$. Sei also Œ$f(a) < f(b)$ (sonst betrachte $-f$). Wir zeigen zuerst: $(*)$ $\forall x$ mit $a < x < b$ ist $f(a) < f(x) < f(b)$.

4.6.1 (18.11.2008)

Sei also $a < x < b$. Wir zeigen zuerst $f(a) < f(x)$.
$\mathbb{A}$ $f(a) > f(x)$ (Wegen f injektiv). Also $f(x) < f(a) < f(b)$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein c mit $x < c < b$ und $f(c) = f(a)$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von f. Analog zeigt man $f(x) < f(b)$.

$\square$

Wir zeigen nun die strenge Monotonie. Seien also $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Wegen $(*)$ ist dann $f(a) \leq f(x_1) < f(b)$. Wendet man $(*)$ auf das Interval $[x_1, b]$ an, so erhält man insbesondere $f(x_1) < f(x_2)$.

$\square$

4.7 Umkehrfunktion

Definition: *Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion. Setze $C = f[A]$. Dann $\forall c \in C$ $\exists! a \in A$ mit $f(a) = c$. Wir können also $f^{-1} : C \to A$ definieren durch die Vorschrift $f^{-1}(c) =$ dasjenige $a \in A$ mit $f(a) = c$. f^{-1} ist die Umkehrfunktion von f. Es gilt also $\forall a \in A$: $(f^{-1} \circ f)(a) = a$.*

Konvention: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv auf $D \subseteq \mathbb{R}$, $C = f[D]$, so betrachten wir die Umkehrfunktion f^{-1} als Funktion von C nach $\mathbb{R}$, also wir schreiben $f^{-1} = C \to \mathbb{R}$.
Bemerkung: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), so ist auch f^{-1} streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).
Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$. Dann gilt $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Satz 4.6 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f^{-1} stetig.*

Beweis: Sei wieder Œf streng monoton wachsend. Setze $E = f[I]$. Also $f^{-1} : E \to \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass f^{-1} in jeden Punkt $d \in E$ stetig ist. Sei also $d \in E$. Dann $\exists c \in I$ mit $f(c) = d$. Wir nehmen an, dass c kein Randpunkt von I ist.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da c kein Randpunkt des Intervalls I ist, $\exists \widetilde{\varepsilon} > 0$ mit $\widetilde{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und $c - \widetilde{\varepsilon}, c + \widetilde{\varepsilon} \in I$. Setze $d_0 = f(c - \widetilde{\varepsilon}), d_1 = f(c + \widetilde{\varepsilon})$. Dann gilt also $d_0 < d < d_1$. Setze $\delta = \min\{d - d_0, d_1 - d\} > 0$. Ist nun $|x - d| < \delta$ mit $x \in E$, so gilt $d_0 < x < d_1$ und daher $c - \widetilde{\varepsilon} = f^{-1}(d_0) < f^{-1}(x) < f^{-1}(d_1) = c + \widetilde{\varepsilon}$. Somit $|f^{-1}(x) - f^{-1}(d)| < 2\widetilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Ist c ein Randpunkt von I, so argumentiere analog „einseitig".

□

Korollar: *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion. Dann ist f^{-1} stetig.*

Beweis: Nach Satz 4.5 ist f streng monoton. Also f^{-1} stetig nach Satz 4.6.

□

Beispiel:

(1) Sei $k \geq 2$. Dann ist $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \sqrt[k]{x}$ stetig.

(2) Zusammen mit früheren Sätzen erhält man etwa:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[3]{|x^2 - 1|}$. Dann ist f stetig.

4.8 Häufungspunkte

Definition: *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. a ist Häufungspunkt von D, wenn man in jeder $U_\varepsilon(a)$ ein Element von D liegt, das von a verschieden ist.*

Beispiel: Sowohl 0 als auch $\frac{1}{2}$ sind Häufungspunkte von $(0, 1)$.
Bemerkung: Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt von D, wenn es eine Folge aus $D \backslash \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.
Beweis: Die Richtung von rechts nach links ist klar. Sei umgekehrt a ein Häufungspunkt von D. Wähle $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in U_{\frac{1}{n+1}}(a) \cap D$ mit $a_n \neq a$. Dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a.

□

4.9 Abgeschlossenheit und Kompaktheit

Definition: *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, wenn sie jeden ihrer Häufungspunkte enthält.*

Beispiel: Genau die folgenden Intervalle sind abgeschlossen:

$$[a,b],[a,\infty),(-\infty,b],\emptyset,\mathbb{R}$$

Definition: *Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ ist kompakt, wenn jede Folge aus D einen Häufungspunkt besitzt, der in der Menge liegt.*

Satz 4.7 *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Wir zeigen zuerst, dass D abgeschlossen ist. Sei hierzu a ein Häufungspunkt von D. Dann existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D\backslash\{a\}$, die gegen a konvergiert. Also ist n der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen Kompaktheit von D somit $a \in D$. Weiterhin kann D nicht unbeschränkt sein. Denn sonst existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$. Dann hat aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überhaupt keinen Häufungspunkt.
Sei umgekehrt D abgeschlossen und beschränkt. Ist dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus D, so besitzt sie einen Häufungspunkt a, da D beschränkt ist (Bolzano-Weierstraß). Dann ist a aber auch Häufungspunkt von D. Somit $a \in D$, weil D abgeschlossen.

□

Die kompakten Intervalle sind also genau die Intervalle der Form $[a,b]$ und die leere Menge.

Satz 4.8 *Jede nichtleere kompakte Menge besitzt ein Maximum und Minimum.*

Beweis: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und nichtleer. Dann ist nach Satz 4.7 insbesondere D beschränkt, also besitzt D ein Supremum und ein Infimum.

Sei $b = \sup D$. Wir zeigen $b \in D$. Dann ist b das Maximum von D. Wäre $b \notin D$, so ist aber b ein Häufungspunkt von D. Denn sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $b' = b - \varepsilon$ keine obere Schranke von D. Also $\exists d \in D$ mit $b' < d$. Dann ist aber $d \in U_\varepsilon(b)$, $d \neq b$. Wegen D abgeschlossen folgt also doch, dass $b \in D$.
Analog zeigt man $\inf D \in D$, also ist $\inf D = \min D$.

□

4.9.1 (20.11.2008)

Satz 4.9 *Sei D kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f[D]$ kompakt.*

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $f[D]$. Dann $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n \in D$ mit $y_n = f(x_n)$ Da D kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $a \in D$ konvergiert- Wegen f stetig gilt dann $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = f(n) \in f[D]$.

□

Korollar: *Sei $D \neq \emptyset$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf D ein Minimum und Maximum an, das heißt $\exists a_1, a_2 \in D$ mit $f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2)\ \forall x \in d$.*

Beweis: nach Satz 4.9 und Satz 4.8.

□

4.10 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$. f ist gleichmäßig stetig, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass $|f(a) - f(a')| < \varepsilon\ \forall a, a' \in D$ mit $|a - a'| < \delta$. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist also stetig. Die Umkehrung ist jedoch falsch.*

Beispiel:

(1) Sei $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$. f ist stetig. Aber f ist nicht gleichmäßig stetig, denn wähle etwa $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$. Dann $\exists n \geq 2$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Somit ist $\frac{1}{n} = |\frac{2}{n} - \frac{1}{n}| < \delta$, aber $|f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}| = |\frac{n}{2} - n| = \frac{n}{2} \geq 1$.

(2) Die Funktion $f(x) = x$ ist natürlich auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Satz 4.10 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis: $\mathbb{A}$: f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n, a'_n \in D$ mit $|a_n - a'_n| < \frac{1}{n+1}$ und $|f(a_n) - f(a'_n)| \geq \varepsilon$. Da D kompakt ist, besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $a \in D$ konvergiert. Nun ist $(a_n - a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Also konvergiert auch $(a'_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a. Wegen f stetig ist aber dann $\lim\limits_{k \to \infty} f(a_{n(k)}) - f(a'_{n(k)}) = \lim\limits_{k \to \infty} f(a_{n(k)}) - \lim\limits_{k \to \infty} f(a'_{n(k)}) = f(a) - f(a) = 0$. Also $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $|f(a_{n(k)}) - f(a'_{n(k)})| < \varepsilon$. Dies ist ein Widerspruch.

□

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$. Sei $a \in D$ oder a ein Häufungspunkt von D (oder $a = \infty$ und D nicht nach oben beschränkt, bzw. $a = -\infty$ und D nicht nach unten beschränkt). Dann schreiben wir $\lim\limits_{x \to a} f(a) = b$, falls für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert oder bestimmt gegen a divergiert, die Folge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert oder bestimmt gegen b divergiert. Ist dabei $a \in \mathbb{R}$, so sagen wir, dass f an der Stelle a den Grenzwert b besitzt.*

Bemerkung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) Sei $a \in D, b \in \mathbb{R}$ Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} = b \Longleftrightarrow f$ ist stetig in a und $b = f(a)$

(2) Sei a ein Häufungspunkt von D, aber $a \notin D$. Für $b \in \mathbb{R}$ definiere $f_b : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ b & \text{für } x = a \end{cases}$$

Dann gilt für $b \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow f_b$ ist stetig in a

Insbesondere gilt also $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass $|f(x) - b| < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Bemerkung: Sei $f : D \to \mathbb{R}, D$ nicht nach oben beschränkt, $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists c \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - b| < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $x > c$.

Analog für $-\infty$.

Beispiel:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} = \infty$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$, denn für $x > 0, x \neq 1$ ist $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ ist im Punkt 1 stetig.

4.11 Einseitige Limites

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$.*

(a) Sei a Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, a)$. Wir schreiben $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b \Longleftrightarrow$ für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D \cap (-\infty, a)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$. (linksseitiger Limes)

(b) Sei a Häufungspunkt von $D \cap (a, \infty)$. Wir schreiben $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = b \Longleftrightarrow$ für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D \cap (a, \infty)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$. (rechtsseitiger Limes)

Wir sagen „$\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ existiert“, falls $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b$ für $b \in \mathbb{R}$. Entsprechend rechtsseitig.

Bemerkung: Seien f, a wie in (a). Falls für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D \cap (-\infty, a)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ die Bildfolge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so existiert $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, das für je 2 solche Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a'_n)$. Dies ist aber klar, da für die Folge $(\widetilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\widetilde{a}_{2n} = a_n, \widetilde{a}_{2n+1} = a'_n$ die Bildfolge $(f(\widetilde{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

$\square$

Analoges gilt für den rechtsseitigen Limes.

5 Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus (25.11.2008)

5.1 Potenzreihen

Definition: *Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Gestalt* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *mit* $a_k \in \mathbb{R}$ *und* x *unbestimmt. Sie konvergiert, bzw. divergiert an der Stelle* $b \in \mathbb{R}$*, wenn* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ *konvergiert/divergiert.*

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Diese konvergiert an der Stelle b mit $|b| < 1$ (geometrische Reihe) und divergiert $\forall b$ mit $|b| \geq 1$.

Lemma 5.1 *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe, die an* $c \in \mathbb{R}$ *konvergiert. Dann konvergiert* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *absolut an allen Stellen* b *mit* $|b| < |c|$.

Beweis: Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $|b| < |c|$. Setze $q = \frac{|b|}{|c|}$. Also $0 \leq q < 1$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$ konvergent ist, ist $(a_k c^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also beschränkt. Sei also $t \in \mathbb{R}$ mit $|a_k c^k \leq t \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\forall k \in \mathbb{N}: \ |a_k b^k| = |a_k c^k| \cdot (\frac{|b|}{|c|})^k \leq t q^k$. Wegen $q < 1$ ist aber $\sum_{k=0}^{\infty} t q^k$ konvergent. Also ist nach dem Majorandenkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ absolut konvergent.

$\square$

5.1.1 Konvergenz, Divergenz und Konvergenzradius

Insbesondere ist also die Menge der Punkte wo die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert, ein Intervall mit dem Mittelpunkt 0. Der Konvergenzradius r von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist der Radius dieses Intervalls, das heißt wir setzen $r = \sup\{|b| \big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k \text{ konvergiert}\}$. Also $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Wir formen hiermit Lemma 5.1 um.

Satz 5.2 *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r. Dann gilt*

(a) *Ist $|b| < r$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ absolut.*

(b) *Ist $|b| > r$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$.*

Beweis: zu (a): Sei $|b| < r$. Nach Definition von r $\exists c$ mit $|b| < |c|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$ konvergent. Somit konvergiert nach Lemma 5.1 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ absolut.
zu (b): Dies folgt aus der Definition von r.

$\square$

Ist $r \in \mathbb{R}$, so kann man über das Konvergenzverhalten an den Randpunkten $-r, r$ keine allgemeinen Aussagen machen. Das werden wir bald an Beispielen erläutern. Zuerst geben wir jedoch an, wie man den Konvergenzradius bestimmen kann. Setze dabei im Folgenden $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$.

Satz 5.3 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r. Dann gilt:*

(a) *Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so ist $r = 0$.*

(b) *Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $r = \frac{1}{s}$ für $s = \sup\{a | a$ ist Häufungspunkt von$(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}\}$.*

Beweis: zu (a): Ist also $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so ist für $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ $(a_k b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, da $|a_k b^k| = (\sqrt[k]{|a_k|}|b|)^k$. Somit ist für $b \neq 0$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ divergent. Also $r = 0$.
zu (b): Wir zeigen zuerst $\frac{1}{s} = r$. Sei hierzu $b \in \mathbb{R}$ mit $|b| < \frac{1}{s}$. Wir müssen ziegen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ konvergiert. Diest ist trivial für $b = 0$. Sei also $b \neq 0$. Wir wenden das Wurzelkriterium an. Also wegen $|b| < \frac{1}{s}$ $\exists$ $0 < q < 1$ mit $s < \frac{q}{|b|}$. Nach Definition von s hat aber dann die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt a mit $a \geq \frac{q}{|b|}$. Da sie beschränkt ist, $\exists$ $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{q}{|b|}$ $\forall k \geq k_0$. Dann ist aber $\sqrt[k]{|a_k b^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}|b| \leq q$ $\forall k \geq k_0$. Somit nach Wurzelkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ konvergent.
Nun zeigen wir $r = \frac{1}{s}$. Hierzu zeigen wir, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ für $|b| > \frac{1}{s}$ divergent. Ist $|b| > \frac{1}{s}$, so ist $\frac{1}{|b|} < s$. Somit hat also $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt a mit $a > \frac{1}{|b|}$.

Dann ist aber $\sqrt[k]{|a_k|} \geq \frac{1}{|b|}$ für unendlich viele k. Somit aber auch $|a_k b^k| \geq 1$ für unendlich viele k. Daher ist $(a_k b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und somit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ divergent.

$\square$

Korollar: *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = s$, so ist $r = \frac{1}{s}$.*

Beweis: Ist $s = \infty$, so folgt die Behauptung aus Satz 5.3(a). Ist $s \in \mathbb{R}$, so folgt die Behauptung aus Satz 5.3(b).
Mit dem Quotientenkriterium kann man zeigen:

Satz 5.4 *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k+1|}{|a_k|} = s$, so ist $r = \frac{1}{s}$.*

Beispiel:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Offenbar ist der Konvergezradius 1. In den beiden Randpunkten $-1, 1$ divergiert die Reihe.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$. Wieder ist der Konvergenzradius 1, denn $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = 1$. Für $x = -1$ konvergiert sie. Für $x = 1$ divergiert sie.

(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$. Konvergenzradius 1, denn $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = 1$. Konvergent an beiden Randpunkten.

5.1.2 Zugehörige Funktionen

Definition: *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ eine Potenzreihe. Setze $I = \{b \in \mathbb{R} | \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k \text{ konvergent}\}$. Also ist I ein Intervall. Definiere $f : I \to \mathbb{R}$ durch $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ für $b \in I$. Dann ist f die zu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k$ gehörige Funktion.*

Satz 5.5 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe und* f *die zugehörige Funktion. Dann ist* f *stetig.*

Beweis: Wir zeigen nur, dass f im Inneren des Konvergenzintervalls I stetig ist. Sei also $b \in I$ kein Randpunkt von I. Wähle q mit $|b| < q < r$, wobei $r =$ Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ absolut konvergent, $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| q^k < \frac{\varepsilon}{3}$. Die Polynomfunktion $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist stetig. Also $\exists \delta_0 > 0$ mit $|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k c^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b^k| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall c$ mit $|c - b| < \delta_0$. Setze $\delta = \min\{\delta_0, q - |b|\} > 0$. Sei nun c gegeben mit $|c - b| < \delta$. Dann ist insbesondere $|c| < q$. Also
$|f(c) - f(b)| = |\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b^k| = |\sum\limits_{k=0}^{n} a_k c^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b^k + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k c^k - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k b^k| \leq |\sum\limits_{k=0}^{n} a_k c^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b^k| + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k||c^k| + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k||b^k| \leq |\sum\limits_{k=0}^{n} a_k c^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b^k| + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| q^k + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| q^k < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

□

5.1.3 27.11.2008

Wir zeigen nun noch, dass eine Potenzreihe, wenn ihr Konvergenzradius verschieden von 0 ist, durch ihre zugehörige Funktion eindeutig bestimmt ist. Insbesondere gilt dies also für Polynome.

Lemma 5.6 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Sei* f *die zugehörige Funktion. Weiterhin sei* $a_k \neq 0$ *für (mindestens) ein* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *mit* $f(b) \neq 0$ $\forall b$ *mit* $0 < |b| < \varepsilon$.

Beweis: Sei $n = \min\{k | a_k \neq 0\}$. Wähle ein φ mit $0 < \varphi < r$ und setze $c = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \varphi^{k-n-1}$. Ist dann $0 < |b| < \varphi$ und $f(b) = 0$, so gilt:
$|a_n b^n| + |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k b^k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k b^k| = |b|^{n+1} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k b^{k-n-1}| \leq c \cdot |b|^{n+1}$. Somit also $0 < |a_n| \leq c \cdot |b| < (c+1)|b|$ und daher $\frac{|a_n|}{c+1} < |b|$. Also ist $\varepsilon = \min\{\frac{|a_n|}{c+1}, \varphi\}$ wie gewünscht.

□

5.1.4 Identitätssatz für Potenzreihen

Satz 5.7 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $r_1 > 0$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r_2 > 0$. *Sei* f *die zu* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *gehörige Funktion und* g *die zu* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *gehörige Funktion. Ist dann* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge mit* $\forall n: \ 0 < |c_n| < \min\{r_1, r_2\}$ *und* $f(c_n) = g(c_n)$, *so ist* $a_k = b_k \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Betrachte die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)\cdot x^k$. Für ihren Konvergenzradius r gilt natürlich $r \geq \min\{r_1, r_2\} > 0$. Sei h die zu $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)\cdot x^k$ gehörige Funktion. Dann gilt natürlich $h(c) = f(c) - g(c) \ \forall c$ mit $|c| < r$.
$\mathbb{A}$ $a_k \neq b_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist also $a_k - b_k \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nach Lemma 5.6 ein $\varepsilon > 0$ mit $h(c) = 0 \ \forall c$ mit $0 < |c| < \varepsilon$. Da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $|c_n| < \varepsilon$. Dann ist $h(c_n) = f(c_n) - g(c_n) = 0$. Wegen $c_n \neq 0$ ist dies ein Widerspruch.

□

Wir führen nun eine der wichtigsten Funktionen der Analysis ein:

5.2 Die Exponentialfunktion

Betrachte dazu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot x^k$. Ihr Konvergenzradius ist ∞, denn $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$. Die Exponentialfunktion exp ist die zu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ gehörige Funktion. Sie ist also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und nach Satz 5.5 stetig. Setze noch $e := \exp(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (eulersche Zahl).

5.2.1 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Satz 5.8 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(a + b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$.

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die beiden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$ sind absolut konvergent. Also gilt nach dem Cauchy-Produkt von Reihen $\exp(a)\cdot\exp(b) = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!})\cdot$

$(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!}$. Nun ist aber nach dem Binomischen Satz $\sum_{i=0}^{k} \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!} \cdot a^k \cdot b^{k-i} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot a^i \cdot b^{k-i} = \frac{1}{k!} \cdot (a+b)^k$. Insgesamt also $\exp(a) \cdot \exp(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (a+b)^k = \exp(a+b)$.

$\square$

Korollar:

(a) $\forall a \in \mathbb{R}: \ \exp(-a) = \exp(a)^{-1}$

(b) $\forall a \in \mathbb{R}: \ \exp(a) > 0$

(c) $\forall z \in \mathbb{Z}: \ \exp(z) = e^z$

(d) exp *ist streng monoton wachsend*

5.3 Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ln ist die Umkehrfunktion von exp. ln ist also auch streng monoton wachsend und stetig.
Wegen $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ und exp stetig, ist $\exp[\mathbb{R}] = (0, \infty)$. Somit $\ln(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Außerdem erfüllt ln die folgende Funktionalgleichung: $\forall a, b \in (0, \infty)$: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.
Für $n > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a^b = \exp(b \cdot \ln(a))$. Wegen $\exp(\ln(a)) = a$ stimmt dies für $b \in \mathbb{Z}$ mit der üblichen Definition überein. Weiterhin gilt mit dieser Notation einfach $\exp(b) = \exp(b \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = e^b$.
Es gelten folgende Rechenregeln:

Satz 5.9 *Seien* $a, b > 0$ *und* $c, d \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

(a) $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$

(b) $(a^c)^d = a^{c \cdot d}$

(c) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

(d) Ist $a < b$, $c > 0$, so ist $a^c < b^c$

(e) Ist $a > 1$, $c < d$, so ist $a^c < a^d$

Bemerkung: Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ ist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, denn: $a^{\frac{1}{n}} > 0$, $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a$.

6 Differenzierbarkeit (02.12.2008)

6.1 Allgemeines

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ sei ein Häufungspunkt von D. f ist in a differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ in $\mathbb{R}$ existiert. Dieser heißt dann die Ableitung von f in a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.*
f ist differenzierbar in einer Teilmenge B von D, wenn f in jedem Punkt $a \in B$ differenzierbar ist. f ist differenzierbar, wenn f in D differenzierbar ist.

Bemerkung: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert, und falls gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Beispiel:

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, etwa $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f'(a) = 0$ für $a \in \mathbb{R}$.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{c-c}{x-a} = 0$

$\square$

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität, d.h. $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f'(a) = 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$

$\square$

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Absolutbetrag, d.h. $f(x) = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.
Beweis: Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}-0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$ Aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$.
Also existiert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ nicht.

□

Satz 6.1 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist f differenzierbar in a genau dann, wenn gilt: $\exists\, c \in \mathbb{R}$ und eine in a stetige Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + r(x) \cdot (x-a)\ \forall x \in D$. In diesem Fall ist $f'(a) = c$.*

Beweis: Sei f differenzierbar in a. Definiere $r : D \to \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-y} - f(a) & \text{für } x \neq a \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$$

Dann ist r stetig in a, denn $r(a) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a, x\neq 0} r(x) = \lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)) = f'(a) - f'(a) = 0$. Mit $c = f'(a)$ gilt aber für $x \in D$: $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + r(x)(x-a)$, denn: Für $x = a$ ist dies klar.
Sei also $x \neq a$. Dann $f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \cdot (x-a) = f(a) + f(a)(x-a) + f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f(x)$.
Seien umgekehrt c ud r wie oben. Dann ist für $x \in D \backslash \{a\}$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + r(x)$.
Also $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(c + r(x)) = c + \lim\limits_{x\to a} r(x) \underset{\text{r stetig in a}}{=} c + r(a) = c + 0$. Somit f differenzierbar in a.

□

Korollar: *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a, so ist f stetig in a.*

Beweis: Seien c, r wie in Satz 6.1, also $f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + r(x) \cdot (x-a)$ für $x \in D$. Wegen r stetig in a ist also f stetig in a.

□

6.2 Ableitungsregeln

Satz 6.2 *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g,\ c \cdot f$ und $f \cdot g$ differenzierbar in a und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Ist noch $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a und es gilt
$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Beweis:

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} = c \cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c \cdot f'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(x) + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a) \underset{\text{da g stetig in a}}{=} f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Sei schließlich $g(a) \neq 0$ und setze $D^* = \{b \in D | g(b) \neq 0\}$. Da g stetig in a, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \cap D \subseteq D^*$. Da a ein Häufungspunkt von D ist, ist also a auch Häufungspunkt von D^*. Wir betrachten zuerst $\frac{1}{g}$. Es ist
$(\frac{1}{g})'(a) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}) = \lim_{x\to a}(\frac{1}{x-a}\cdot\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}) = \lim_{x\to a}(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{-1}{g(x)g(a)}) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot \lim_{x\to a}\frac{-1}{g(x)g(a)} \underset{\text{da g stetig in a}}{=} \frac{g'(a)}{-(g(a))^2}$.
Wenden wir zusätzlich die Produktregel an, so erhalten wir $(\frac{f}{g})'(a) = (f \cdot \frac{1}{g})'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\cdot\frac{-g'(a)}{(g(a))^2} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$

□

6.2.1 Ableitung von Polynomfunktionen

Korollar: *Sei* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *eine Polynomfunktion. Dann ist* f *differenzierbar und es gilt:*
$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$.

Beweis: Sei für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $f_k(x) = x^k$. Dann ist f_k differenzierbar und es gilt $f'_k(x) = kx^{k-1}$. Dies zeigen wir durch Induktion über $k \geq 1$:
Induktionsanfang: $k = 1$: $f_1 = x^1 \Rightarrow f'_1 \underset{=id(x)}{=} 1 = 1 \cdot x^0 \checkmark$
Induktionsschritt: Es ist $f_{k+1} = f_1 \cdot f_k$. Also nach Produktregel und Induktionsvorraussetzung:
$f'_{k+1}(x) = f'_1(x) \cdot f_k(x) + f_1(x) \cdot f'_k(x) \overset{\text{I.V.}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k$.
Setze noch $f_0(x) = x^0 = 1$. Nach früheren Beispielen ist $f'_0(x) = 0$. Also erhalten wir $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k f_k)'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f'_k(x) = f'_0(x) \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k f'_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

$\square$

6.2.2 Kettenregel (04.12.2008)

Satz 6.3 *Seine* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $f[D] \subseteq E$. *Die Funktion* f *sei in* a *differenzierbar und* g *sei in* $f(a)$ *differenzierbar. Dann ist* $g \circ f$ *in* a *differenzierbar, und es gilt:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Beweis: Setze $b = f(a)$. Nach Satz 6.1 existiert Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $r(b) = 0$ und r stetig in b, so dass für alle $g \in E$ gilt:

$$(*) \quad g(y) - g(b) = g'(b)(y-b) + r(y)(y-b)$$

Dann ist $r \circ f$ stetig in a, und es gilt daher $\lim_{x \to a} r(f(x)) = r(f(a) = 0$.
$\Rightarrow \quad (g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to a} \left(g'(f(a)) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + r(f(x)) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) = g'(f(a))f'(a)$

$\square$

6.2.3 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 6.4 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Weiterhin sei f in a differenzierbar, und es gelte $f'(a) \neq 0$. dann ist f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar, und es gilt:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \right)$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass b ein Häufungspunkt von $f[I]$ ist. Nun ist a ein Häufungspunkt von I. Also existiert Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $I\backslash\{a\}$, die gegen a konvergiert. Da f stetig ist in a und f injektiv, ist dann $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f[I]\backslash\{b\}$, die gegen b konvergiert. Wir zeigen nun: $\lim\limits_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}$
Sie hierzu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $f[I]\backslash\{b\}$, die gegen a konvergiert. Setzt $x_n = f^{-1}(b) = a$. Somit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Beispiel:

1. Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$. f ist differenzierbar und streng monoton wachsend. Sei $g = f^{-1}$. Aber $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$. Sei $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 0$. Dann ist $g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}}$. In 0 ist g nicht differenzierbar.

2. Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Dann nach (1) und Kettenregel für $a \in \mathbb{R}$.
$$h'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

6.3 Extrema

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$.*

f hat in a ein lokales Maximum, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(a)$ $\forall\ x \in U_\varepsilon(a) \cap D$.

f hat in a ein <u>lokales Minimum</u>, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(a) \leq f(x)$ $\forall\ x \in U_\varepsilon(a) \cap D$.

f hat in a ein <u>lokales Extremum</u>, wenn f in a ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.

Definition: *Sei I ein Intervall. Setzt $\overset{\circ}{\mathrm{I}} = \{x \in I | x$ ist kein Randpunkt von $I\}$. $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ ist das Innere von I. $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ ist also ein offenes Intervall.*

<u>Beispiel:</u> Sei $I = [0, 1)$. Dann $\overset{\circ}{\mathrm{I}} = (0, 1)$.

Satz 6.5 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist. Weiterhin sei $a \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}$ und f in a differenzierbar. Besitzt f in a ein lokales Extremum, so ist $f'(a) = 0$.*

<u>Beweis:</u> Œ habe f in a ein lokales Maximum. (Sonst betrachte -f). Es ist

$$f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

und

$$f'(a) = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

□

6.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 6.6 *(Satz von Rolle)*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

<u>Beweis:</u> Da $[a, b]$ kompakt ist, nimmt f auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum an. Seien also $c_0, c_1 \in [a, b]$ mit $f(c_0) = \max f[[a, b]]$, $f(c_1) = \min f[[a, b]]$.

<u>1. Fall</u>: $f(c_0) = f(c_1)$
Dann ist f konstant, also $f'(x) = 0 \quad \forall \quad x \in (a, b)$.

2. Fall: $f(c_0) \neq f(c_1)$
Wegen $f(a) = f(b)$ existiert dann ein i mit $c_i \in (a, b)$. Setze $c = c_i$. Natürlich hat f in c ein lokales Extremum. Also ist nach Satz 6.5 $f'(c) = 0$

□

Satz 6.7 *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, die in (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis: Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Dann ist $g(a) = f(a) = g(b)$. Außerdem ist g stetig und differenzierbar in (a, b). Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. Nun ist aber $g'(0) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Also ist c wie gewünscht.

□

Bemerkung: Der Satz von Rolle ist natürlich ein Spezialfall des Mittelwertsatzes.

6.4.1 09.12.08

Satz 6.8 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $\mathring{I}$ differenzierbar ist.*

(a) *Ist für alle $x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$, so ist f konstant.*

(b) *Ist für alle $x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geq 0$, so ist f monoton wachsend.*

(c) *Ist für alle $x \in \mathring{I}$, $f'(x) > 0$, so ist f streng monoton wachsend.*

(d) *Ist für alle $x \in \mathring{I}$, $f'(x) \leq 0$, so ist f monoton fallend.*

(e) *Ist für alle $x \in \mathring{I}$, $f'(x) < 0$, so ist f streng monoton fallend.*

Beweis: Seien $a, b \in I$, $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $c \in (a, b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Daraus folgt jeweils $f(b) - f(a) = 0$, bzw ≥ 0, > 0, ≤ 0, < 0.

$\square$

Bemerkung: Die Bedingung in (c) ist aber nicht notwendig. Denn z.B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$. In (a), (b) und (d) gilt aber jeweils die Umkehrung, was unmittelbar aus der Def. folgt.

6.5 Höhere Ableitung

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Setze $D' = \{a \in D | f$ ist differenzierbar in $a\}$ und so $f' : D' \to \mathbb{R}$ die Ableitung von f. Wir definieren rekursiv für $n \in \mathbb{N}$:*

$$f^{(o)} = f \quad ; \quad f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$$

Für $n \geq 1$ ist $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f. f ist n-mal differenzierbar in a, wenn $f^{(n-1)}$ differenzierbar in a ist. Entsprechend wird definiert "f ist n-mal differenzierbar in $B \subseteq D$" bzw. "f ist n-mal differenzierbar".

Satz 6.9 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $a \in I$ mit $f'(a) = 0$, und sei f in a zweimal differenzierbar:*

(a) Ist $f''(a) > 0$, so hat f in a ein lokales Maximum

(b) Ist $f''(a) < 0$, so hat f in a ein lokales Minimum

Beweis:

Zu (a): Sei $f''(a) > 0$. Wegen $f'(a) = 0$ ist $f''(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{x-a}$. Sei zuerst $a \in \mathring{I}$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$ und $\frac{f'(x)}{x-a} > 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(a) \backslash \{a\}$. Somit gilt:

- $f'(x) < 0$ für $x \in (a - \varepsilon, a)$ und
- $f'(x) > 0$ für $x \in (a, a + \varepsilon)$

Daher ist nach Satz 6.8 f im Intervall $(a-\varepsilon, a)$ streng monoton fallend und im Intervall $[a, a+\varepsilon)$ streng monoton wachsend. Somit gilt $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$, d.h. f hat in a ein lokales Maximum. Ist a ein Randpunkt von I, so argumentiere analog einseitig.

Zu (b): Wende (c) auf $-f$ an.

□

6.5.1 Potenzreihen sind im Inneren differenzierbar

Satz 6.10 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, und sei f die zugehörige Funktion. Dann ist f in $(-r, r)$ differenzierbar, und für alle $b \in (-r, r)$ gilt*

$$f'(b) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k b^{k-1}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ größer gleich r ist. Sei hierzu $0 < |b| < r$. Wir müssen zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k b^{k-1}$ konvergiert. Im Beweis von Lemma 5.1 wurde gezeigt, dass ein $t \in \mathbb{R}$ und ein q mit $0 < q < 1$ existieren, so dass gilt $|a_k b^k| \leq t q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt also $|k a_k b^{k-1}| \leq |b|^{-1} k t q^k$ für alle $k \geq 1$.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |b|^{-1} k t q^k$ ist aber nach dem Quotientenkriterium konvergent, da $\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^{-1}(k+1)tq^{k+1}}{|b|^{-1}ktq^k} = q \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = q$. Also ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k b^{k-1}$ absolut konvergent.
Sei nun $b \in (-r, r)$. wir wollen zeigen, dass $f'(b) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k b^{k-1}$. Setze hierzu für $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Also $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle ein c mit $|b| < c < r$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k c^{k-1}$ absolut konvergent. Also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|c^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiterhin existiert ein $\lambda > 0$ mit $\left|\frac{f_n(x)-f_n(b)}{x-b} - f_n'(b)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in U_\varepsilon(b)\backslash\{b\}$. o.E. sei $\lambda \leq c - |b|$. Sei nun $x \in U_\lambda(b)\backslash\{b\}$. Nach dem

Satz 6.7 (Mittelwertsatz) existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein c_k aus dem offenen Intervall mit den Randpunkten x, b, sodass gilt $\frac{a_k x^k - a_k b^k}{x-b} = k a_k c^{k-1}$ (denn $(a_k x^k)' = k a_k x^{k-1}$). Natürlich ist $|c_k| = c$. Somit erhalten wir
$\left|\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k b^{k-1}\right| = \left|\frac{f_n(x)-f_n(b)}{x-b} - f_n'(b) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k c_k^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k b^{k-1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|c^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|c^{k-1} < \varepsilon$

□

Korollar: *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$, *und sei* f *die zugehörige Funktion. Dann ist* f *in* $(-r, r)$ *beliebig oft differenzierbar und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) a_k x^{k-n}$ *mit* $x \in (-r, r)$. *Außerdem gilt* $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Beweis: Der erste Teil folgt durch einfache Induktion. Der zweite Teil durch Einsetzen.

6.6 Exponentialfunktion

Satz 6.11 *Die Exponentialfunktion ist die einzige differenzierbare Funktion* f *von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$ *mit* $f' = f$ *und* $f(0) = 1$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass exp die beiden Eigenschaften besitzt: Nach Satz 6.10 ist exp differenzierbar, und für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\exp(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b^k$, dass $\exp'(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} b^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} b^{k-1}$.
Außerdem ist $\exp(0) = 1$.
Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$ und $f(0) = 1$. Dann ist $\left(\frac{f}{\exp}\right)' = \frac{f' \exp - f \exp'}{\exp^2} = 0$. Also ist $\frac{f}{\exp} = c$ für eine Konstante c. Also $c = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$. Somit $f = \exp$.

□

6.6.1 Ableitung des Logarithmus

Damit kennen wir die Ableitung des Logarithmus. Für $b > 0$ gilt $\ln'(b) = \frac{1}{b}$, denn $\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(\ln(b))} = \frac{1}{\exp(\ln(b))} = \frac{1}{b}$

6.6.2 11.12.08

In kurzer Schreibweise gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$(x^a)' = (\exp(a\ln(x)))' = \exp'(a\ln(x))(a\ln(x))' = \exp(a\ln(x))\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

und für $a > 0$: $(a^x)' = (\exp(a\ln(a)))' = \ln(a)a^x$

Satz 6.12 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$.*

Beweis: Setze für $n > 0$ $\quad x_n = \frac{x}{n}$. Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1 + x_n) - \ln(1)}{x_n} = \ln'(1) = 1$$

Wegen exp stetig also:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + x_n)^n = \lim_{n\to\infty}\exp(n\ln(1 + x_n)) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(x\frac{\ln(1 + x_n)}{x_n}\right) = \exp(x) = e^x$$

6.7 Trigonometrische Funktionen

Definition: *Die Sinusfunktion* sin *sei die zu der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ zugehörige Funktion.*
Die Kosinusfunktion cos *sei die zu der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ zugehörige Funktion.*
Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da der Konvergenzradius der jeweiligen Potenzreihe ∞ ist. Um dies zu sehen, wenden wir das Quotientenkriterium an. Sei hierzu $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}$ absolut konvergent, da $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|b|^{2k+3}(2k+1)!}{|b|^{2k+1}(2k+3)!} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{|b|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0$. Analog folgt, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k}}{(2k)!}$ absolut konvergent ist.

Satz 6.13 *Das Paar* $(\sin, \cos)$ *ist das einzige Paar* (f, g) *von differenzierbaren Funktionen* f, g *von* $\mathbb{R}$ *von* $\mathbb{R}$ *mit den Eigentschaften:*

(1) $f' = g$ *und* $g' = -f$

(2) $f(0) = 0$ *und* $g(0) = 1$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass sin und cos die Eigenschaften (1) und (2) erfüllen. Nach Satz 6.10 sind sin, cos differenzierbar, und es gilt für $b \in \mathbb{R}$:

$$\sin'(b) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{b^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k}}{(2k)!} = \cos(b)$$

$$\begin{aligned}\cos'(b) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k)\frac{b^{2k+1}}{(2k)!} &= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{b^{2k-1}}{(2k-1)!} = \\ -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} &= -\sin(b)\end{aligned}$$

Weiterhin ist $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = (-1)^0\frac{0}{0!} = 1$.

$\square$

Seien nun f, g differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit (1) und (2). Wir zeigen zuerst: (3) $f^2 + g^2 = 1$.
Beweis: $(f^2 + g^2)' = 2f'f + 2g'g \overset{(1)}{=} 2gf - 2fg = 0$ Also $f^2 + g^2 =$ konstant. Aber $(f^2 + g^2)(0) \overset{(2)}{=} 0 + 1 = 1$

$\square$

Setze nun $h_1 = f\cos - g\sin$ und $h_2 = f\sin + g\cos$. Dann gilt:

$$h_1' = f'\cos + f\cos' - g'\sin - g\sin' = g\cos - f\sin + f\sin - g\cos = 0$$

und

$$h_2' = f'\sin + f\sin' + g'\cos + g\cos' = g\sin + f\cos - f\cos - g\sin = 0$$

Also sind h_1 und h_2 beide konstant.
Aber:

$$h_1(0) = f(0)\cos(0) - g(0)\sin(0) = 0 \text{ und}$$

$$h_2(0) = f(0)\sin(0) + g(0)\cos(0) = 1$$

Also ist $h_1 = 0$ und $h_2 = 1$. Somit:

$$\begin{aligned} g &= f \cdot 0 + g \cdot 1 = f \cdot h_1 + g \cdot h_2 = f(f\cos - g\sin) + g(f\sin + g\cos) = \\ &= f^2\cos - fg\sin + gf\sin + g^2\cos = (f^2 + g^2)\cos \overset{(3)}{=} \cos \end{aligned}$$

und daher auch $f = -g' = -\cos' = \sin$

□

Bemerkung: In (3) haben wir insbesondere gezeigt: $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

6.7.1 Additionstheoreme

Satz 6.14 *(a)* $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

(b) $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

Beweis: Sei $y \in \mathbb{R}$ fest. Definiere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$g(x) = \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Wir müssen zeigen, dass $f = g = 0$. Nun ist

$$f'(x) = \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = g(x) \text{ (} y \text{ sei konstant)}$$

$$g'(x) = -\sin(x+y) + \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = -f(x)$$

d.h. $f' = g$ und $g' = -f$. Somit erhalten wir wie in (3) aus dem Beweis des letzten Satzes $(f^2+g^2) = 0$. Somit ist f^2+g^2 konstant. Aber $(f^2+g^2)(0) = f^2(0)+g^2(0) = 0$. D.h. $f^2 + g^2 = 0$, also $f = g = 0$.

□

Mit etwas Mühe kann man zeigen:

Satz 6.15 *Die Kosinusfunktion besitzt eine kleinste positive Nullstelle.*

Wir können also definieren $\pi = 2a$ mit a =die kleinste positive Nullstelle von cos. Es ist also $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und damit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Mit Hilfe der Additionstheoreme erhält man leicht

$$\sin(\pi) = 0 \quad , \quad \cos(\pi) = -1 \quad , \quad \sin(2\pi) = 0 \quad , \quad \cos(2\pi) = 1$$

und dann die Periodizität :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

7 Integrierbarkeit (16.12.2008)

7.1 Treppenfunktionen

Definition: *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. f ist eine Treppenfunktion, wenn es Punkte $x_0 \dots x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, derart dass f in jedem offenen Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist.*

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $z = x_0, \dots, x_n$ eine Zerlegung wie oben mit f konstant in (x_{k-1}, x_k) für $1 \leq k \leq n$. Sei etwa $f(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$. Setze dann $S_z(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$. Ist Z' eine weitere Zerlegung dieser Art, so ist offenbar $S_z(f) = S_{Z'}(f)$, denn ist $S_Z(f) = S_{Z \cup Z'}(f) = S_{Z'}(f)$. Wir können also definieren $\int\limits_a^b f dx = S_Z(f)$. „Integral von f“

Lemma 7.1 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, cf Treppenfunktionen und es gilt:*

(1) $\int\limits_a^b (f + g)dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx$ *(Linearität)*

(2) $\int\limits_a^b cf\, dx = c \cdot \int\limits_a^b f dx$ *(Linearität)*

(3) Ist $f \leq g$ (d.h. $f(x) < g(x)\ \forall x \in [a,b]$), so ist $\int\limits_a^b f dx \leq \int\limits_a^b g dx$.

Beweis: Der erste Teil ist offensichtlich.
zu(1): Sei Z eine geeignete Zerlegung für f und Z' eine geeignete Zerlegung für g. Dann ist $\int\limits_a^b (f+g)dx = S_{Z \cup Z'}(f+g) = S_{Z \cup Z'}(f) + S_{Z \cup Z'}(g) = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx$. (2) und (3) sind klar.

$\square$

7.2 Norm und Beschränktheit

Definition: *Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \neq 0$. Setze $\|f\| = \sup\{|f(x)| \big| x \in D\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. $\|f\|$ ist die Norm von f. f ist beschränkt, wenn $\|f\| < \infty$.*

Bemerkung: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ (hier $d \cdot \infty = \infty$ für $d > 0$, $0 \cdot \infty = 0$).
$\|f + g\| \leq \|f\| + \|f\|$.
Beweis: $\|cf\| = \sup\{|cf(x)| \big| x \in D\} = \sup\{|c||f(x)| \big| x \in D\} = |c| \cdot \sup\{|f(x)| \big| x \in D\} = |c| \cdot \|f\|$.
$\|f + g\| = \sup\{|(f+g)(x)| \big| x \in D\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \big| x \in D\} = \|f\| + \|g\|$

$\square$

Bemerkung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann gilt $|\int\limits_a^b f dx| \leq \|f\| \cdot (b-a)$.
Beweis: $\int\limits_a^b f dx \leq \int\limits_a^b \|f\| \cdot 1 \cdot dx = \|f\| \int\limits_a^b 1 dx = \|f\|(b-a)$. Außerdem $-\int\limits_a^b f dx = \int\limits_a^b -f dx \leq \int\limits_a^b \|f\| \cdot 1 \cdot dx = \|f\| \int\limits_a^b 1 dx = \|f\|(b-a)$

$\square$

7.3 Regelfunktionen

Definition: *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. f ist eine Regelfunktion, wenn es $\forall \varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ gibt, mit $\|f - g\| \leq \varepsilon$.*

Bemerkung: $f : I \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $g_n : I \to \mathbb{R}$ gibt, mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0$.
Bemerkung: Jede Regelfunktion ist beschränkt.
Beweis: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann existiert insbesondere eine Treppenfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit $\|f - g\| \leq 1$. Also $\|f\| = \|(f - g) + g\| \leq \|f - g\| + \|g\| < \infty$.

□

Satz 7.2 *Eine Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn $\forall c \in (a, b]$ der linksseitige Limes $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$ existiert und $\forall c \in [a, b)$ der rechtsseitige Limes $\lim\limits_{x\searrow c} f(x)$ existiert.*

Beweis: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Sei $c \in [a, b]$. Wir müssen zeigen, das $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$ existiert. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a \leq x_n \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Wir müssen zeigen, dass die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Hierzu zeigen wir, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Da f eine Regelfunktion ist, existiert eine Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $((_n)_{n\in\mathbb{N}}x)$ konvergent und g Treppenfunktion $\exists\ m \in \mathbb{N}$ mit $g(x_n) = g(x_m)\ \forall n \geq m$. Dann ist aber $\forall n \geq m$:

$$|f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n) - g(x_n)) + (g(x_m) - f(x_m))| \leq$$
$$|f(x_n) - g(x_n)| + |(g(x_m) - f(x_m))| \leq 2 \cdot \|f - g\| < \varepsilon$$

Für die Existenz des rechtsseitigen Limes argumentiert man analog. Sei nun die Bedingung auf der rechten Seite für f erfüllt. Wir nehmen an, dass f keine Regelfunktion ist, und führen das zu einem Widerspruch. Hierzu benutzen wir die Intervallhalbierungsmethode. Nach unserer Annahme $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $\|f - g\| > \varepsilon$ für alle Treppenfunktionen g auf $[a, b]$. Wir definieren rekursiv $F_n = [a_n, b_n]$ so, dass für f_n = die Einschränkung von f auf I_n gilt:

(1) Für alle Treppenfunktionen g auf I_n gilt $\|f_n - g\| > \varepsilon$

(2) $I_{n+1} \leq I_n \leq [a, b]$

(3) $(b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Setze $I_0 = [a, b]$. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ schon konstruiert, so sei d der Mittelpunkt von I_n. Sei f^x die Einschränkung von f auf $[a_n, d]$ und f^{xx} die Einschränkung von f auf $[d, b_n]$. Dann gilt für alle Treppenfunktionen g auf $[a_n, d]$: $\|f^x - g\| > \varepsilon$ oder für alle Treppenfunktionen h auf $[d, b_n]$: $\|f^{xx} - h\| > \varepsilon$. Wähle I_{n+1} als eine solche Hälfte. Sei nun c der Punkt $a_n \leq c \leq b_n \ \forall n$ (d.h. $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$). Wir betrachten den Fall, dass $c \in (a, b)$. Sei dann $y_0 = \lim\limits_{x \nearrow c} f(x)$ und $y_1 = \lim\limits_{x \searrow c} f(x)$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ für $x \in (c - \delta, c)$ und $|f(x) - y_1| < \varepsilon$ für $x \in (c, c + \delta)$. Zu diesem $\delta \ \exists n$ mit $I_n \subseteq (c - \delta, c + \delta)$. Definiere nun $g : I_n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } a_n \leq x < c \\ f(c) & \text{für } x = c \\ y_1 & \text{für } c < x \leq b_n \end{cases}$$

Dann ist g eine Treppenfunktion mit $\|f_n - g\| \leq \varepsilon$. Das ist ein Widerspruch zu (1).

□

Korollar:

(a) Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist eine Regelfunktion.

(b) Jede monotone Funktion auf einem kompakten Intervall ist eine Regelfunktion.

Korollar: *Seien I ein kompaktes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und $c \in \mathbb{R}$.*

Dann sind $f+g, cf, f\cdot g$ und $|f|$ Regelfunktionen. Ist $g(x)\neq 0\ \forall x\in I$, so ist auch $\frac{f}{g}$ eine Regelfunktion.

7.3.1 18.12.2008

Lemma 7.3 *Sei f eine Regelfunktion auf $I=[a,b]$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf I mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-g_n\|=0$. Dann gilt:*

(a) Die Folge $(\int\limits_a^b g_n dx)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) Ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen auf I mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-h_n\|=0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b g_h dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b h_n dx$

Beweis: zu (a) Dies ist trivial für $a=b$. Sei also $a<b$. Wir zeigen, dass $(\int\limits_a^b g_n dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei also $\varepsilon>0$. Dann $\exists m\in\mathbb{N}$ mit $\|f-g_n\|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}\ \forall m\geq n$. Dann ist aber für $k,n\geq m$:
$|\int\limits_a^b g_n dx-\int\limits_a^b g_k dx|=|\int\limits_a^b (g_n-g_k)dx|\leq(b-a)\cdot\|g_n-g_k\|\leq(b-a)(\|g_n-f\|+\|f-g_k\|)<\varepsilon$

zu (b) Sei wieder $a\neq b$. Es ist zu sagen, dass $(\int\limits_a^b g_n dx-\int\limits_a^b h_n dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Sei also $\varepsilon>0$. Dann $\exists m\in\mathbb{N}$ mit $\|f-g_n\|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$ und $\|f-h_n\|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}\ \forall n\geq m$. Dann ist aber für $n\geq m$
$|\int\limits_a^b g_n dx-\int\limits_a^b h_n dx|=|\int\limits_a^b (g_n-h_n)dx|\leq(b-a)\cdot\|g_n-h_n\|\leq(b-a)\cdot(\|g_n-f\|+\|f-h_n\|)<\varepsilon.$

□

7.3.2 Integral von Regelfunktionen

Somit können wir für Regelfunktionen $f:I\to\mathbb{R}, I=[a,b]$ das Integral wie folgt definieren: Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf I mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-g_n\|=0$. Setze $\int\limits_a^b f dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b g_n dx$. Wegen Lemma 7.3 ist dies wohldefiniert. Für

Treppenfunktionen f stimmt diese Definition mit der früheren überein.

Beispiel: Wir möchten $\int\limits_0^1 x^2 dx$ bestimmen. Sei $n \geq 1$. Definiere $g_n : I \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ (\frac{k}{n})^2 & \text{falls } \frac{k}{n} < x \leq \frac{k+1}{n} \end{cases}.$$

Dann ist g_n eine Treppenfunktion und es gilt:

$\|f - g_n\| = \max\{(\frac{k+1}{n})^2 - (\frac{k}{n})^2 \big| k < n\} = 1 - (\frac{n-1}{n})^2$.

Also $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0$. Nun ist aber

$\int\limits_0^1 g_n dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cot \sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6}$.

Also $\int\limits_0^1 x^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{6} = \frac{1}{3}$.

Satz 7.4 *Seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(1) $\int\limits_a^b (f + g) dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx$ *(Linearität)*

(2) $\int\limits_a^b c \cdot f dx = c \cdot \int\limits_a^b f dx$ *(Linearität)*

(3) Ist $f \leq g$, so ist $\int\limits_a^b f dx \leq \int\limits_a^b g dx$ *(Monotonie)*

Beweis: Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen auf I mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - g_n\| = 0$.

zu (1) Es ist $\|(f+g)-(f_n+g_n)\| \leq \|f-f_n\|+\|g-g_n\|$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|(f+g)-(f_n+g_n)\| = 0$. Daher, da $f_n + g_n$ Treppenfunktion, $\int\limits_a^b (f + g) dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b (f_n + g_n) dx \overset{\text{Lemma 7.1}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n dx + \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx$.

zu (2) Es ist $\|cf - cf_n\| = |c| \cdot \|f - f_n\|$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|cf - cf_n\| = 0$ und daher, da $c \cdot f_n$ Treppenfunktion, $\int\limits_a^b cf dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b cf_n dx = \lim\limits_{n\to\infty} c \int\limits_a^b f_n dx = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n dx = c \cdot \int\limits_a^b f dx$.

zu (3) Es genügt zu zeigen ($*$) Ist $h : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $h \geq 0$, so ist $\int_a^b h dx \geq 0$. Dann sei ($*$) gezeigt. Ist dann $f \leq g$, so ist $(g-f) \geq 0$. Also nach (1),(2)

$$0 \underset{\text{nach } (*)}{\leq} \int_a^b (g-f) dx = \int_a^b g dx - \int_a^b f dx, \text{ d-h } \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Wir müssen also nur noch ($*$) zeigen. Sei hierzu $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|h - h_n\| = 0$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $h_n^* : I \to \mathbb{R}$ durch $h_n^*(x) = \begin{cases} h_n(x) & \text{falls } h_n(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Dann ist h_n^* eine Treppenfunktion mit $h_n^* \geq 0$ und wegen $h \geq 0$ ist $|h(x) - h_n^*(x)| \geq |h(x) - h_n(x)|\ \forall x \in I$. Also $\|h - h_n^*\| \leq \|h - h_n\|$. Und daher $\lim_{n\to\infty} \|h - h_n^*\| = 0$. Somit $\int_a^b h dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n^* dx \overset{\text{refl7.1}}{\geq} 0$.

□

Korollar: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gilt* $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq (b-a)\|f\|$.

<u>Beweis:</u> Da $f, -f \leq |f|$, gilt $\int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx$ und $-\int_a^b f dx = \int_a^b -f dx \leq \int_a^b |f| dx$. Also $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$. Weiterhin $\int_a^b |f| dx \leq \int_a^b \|f\| \cdot 1 dx = \|f\| \int_a^b 1 dx = \|f\|(|b-a|)$.

□

Satz 7.5 *Seien $a \leq b \leq c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, dann gilt:* $\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$.

<u>Beweis:</u> Für Treppenfunktionen ist die Gleichung offenbar richtig. Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfuntionen auf $[a, c]$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Sei f_n^* die Einschränkung von f_n auf $[a, b]$ und f_n^{**} die Einschränkung von f_n auf $[b, c]$. Dann sind f_n^*, f_n^{**} Treppenfunktionen, und es gilt $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n^*\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n^{**}\|$. Also $\int_a^c f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n dx = \lim_{n\to\infty} (\int_a^b f_n^* dx + \int_b^c f_n^{**} dx) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^* dx + \lim_{n\to\infty} \int_b^c f_n^{**} dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$.

$\square$

Definition: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion wobei $a < b$. Setze dann $\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx$.*
Mit dieser Konvention gilt dann für Regelfunktionen f und beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$.

7.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung (8.1.2009

Satz 7.6 *Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $g \geq 0$. Dann $\exists c \in [a, b]$ mit $\int_a^b fgdx = f(c) \cdot \int_a^b gdx$. Im Spezialfall $g = 1$ gilt also $\int_a^b fdx = f(c)(b - a)$.*

Beweis: Sei $I = [a, b]$. Da f stetig, besitzt $f[I]$ ein Minimum und ein Maximum. Setze $m = \min f[I]$ und $M = \max f[I]$. Wegen $g \geq 0$ gilt dann $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$ und daher nach Satz 7.4:
$m \int_a^b gdx = \int_a^b mgdx \leq \int_a^b fgdx \leq \int_a^b Mgdx = M \int_a^b gdx$. Somit $\exists d \in [m, M]$ mit $\int_a^b fgdx = d \int_a^b gdx$. Wegen f stetig existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in [a, b]$ mit $d = f(c)$

$\square$

Definition: *Sei I ein Intervall. I ist echt, wenn I mindestens 2 Punkte enthält.*

Satz 7.7 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein echtes Intervall sei. Weiterhin sei $a \in I$. Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für $x \in I$. Dann ist F differenzierbar, und es gibt $F' = f$.*

Beweis: Sei $x \in I$. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Nun ist für $h \neq= 0$ mit $x+h \in I$:
$F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt$.
Nach Satz 7.6 existiert aber für jedes solche h ein $c_h \in [x, x+h]$, falls $h > 0$, bzw. $c_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$, mit $F(x+h) - F(x) = f(c_h) \cdot h$. Natürlich ist dann $\lim\limits_{h\to 0} c_h = x$, da $|x - c_h| \leq h$. Wegen f stetig also $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x-h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c_h)\cdot h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$

$\square$

Definition: *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein echtes Intervall. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$.*

Bemerkung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein echtes Intervall.

(a) Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$, so ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

(b) Sind F, G Stammfunktionen von f, so ist $F - G$ konstant.

Beweis: zu (a): Sei F Stammfunktion von f, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $F + c$ differenzierbar und $(F + c)' = F' = f$.
zu(b): $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Also ist $F - G$ konstant.
Bemerkung: Aus Satz 7.7 folgt, dass jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ folgt, dass jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, I echtes Intervall, eine Stammfunktion besitzt.

7.5 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 7.8 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $a < b$ und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Beweis: Definiere $G : I \to \mathbb{R}$ durch $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ für $x \in I$. Nach Satz 7.7 ist G eine Stammfunktion von f. Also ist nach obiger Bemerkung $F - G$ konstant. Somit ist $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int\limits_a^b f(t)dt$.

$\square$

Notation:

(1) $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

(2) $\int f(x)dx = F(x)$ für F ist Stammfunktion von f (unbestimmtes Integral)

Mit Hilfe von Satz 7.8 kann man viele Integrale ausrechnen.
Beispiel:

(1) $\frac{x^3}{3}$ ist Stammfunktion von x^2. Also $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

(2) e^x ist Stammfunktion von e^x. Also $\int\limits_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$.

Definition: *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. f ist n-mal stetig differenzierbar, wenn f n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig ist.*
stetig differenzierbar=einmal stetig differenzierbar.

7.6 Substitutionsregel

Satz 7.9 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, I ein echtes Intervall und $\varphi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar, $a < b$. Dann gilt $\int\limits_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi b} f(x)dx$*

Beweis: Nach Satz 7.7 sei F eine Stammfunktion von f. Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ für $t \in [a, b]$. Nach Vorraussetzung sind f, φ, φ' stetig. Nach Kettenregel ist $(f \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g(t)$. Somit ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von g und daher nach Fundamentalsatz
$\int\limits_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int\limits_a^b g(t)dt = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(B)) - F(\varphi(a)) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$

$\square$

Anwendungen hiervon: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

(1) $\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$. Hier: Substitution: $\varphi(t) = t + c$, also $\varphi'(t) = 1$.

(2) Für $c \neq 0$ gilt: $\int_a^b f(c \cdot t)dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{a \cdot c}^{b \cdot c} f(x)dx$. Hier: Substitution: $\varphi(t) = c \cdot t$, also $\varphi'(t) = c$.

(3) $\int_a^b t \cdot f(t^2)dt = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$. Hier: Substitution: $\varphi(t) = t^2$, also $\varphi'(t) = 2t$.

7.7 Partielle Integration

Satz 7.10 *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a < b$. Dann gilt:* $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)\dot{g}(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$

Beweis: : Sei $H = f \cdot g$. Nach Produktregel gilt: $H' = f'g + g'f$. Nach Vorraussetzung ist H' stetig. Nach Fundamentalsatz $\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x) = \int_a^b H'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b$. Hieraus folgt die Behauptung.

□

Man kann die partielle Integration auch für unbestimmte Integrale formulieren und erhält dann für stetig differenzierbare f, g einfach: $\int f \cdot g'dx = f \cdot g - \int f' \cdot gdx$.
Beispiel:

(1) Wollen $\int ln(x)dx$ bestimmen. Setze $f(x) = \ln(x), g(x) = x$. Also $f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1$. Also $\int \ln(x)dx = \int \ln(x) \cdot 1dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot xdx = \ln(x) \cdot x - x = x \cdot (\ln(x) - 1)$

(2) $\int \sin^2(x)dx = -\int \sin(x)\cos'(x)dx = -sin(x)cos(x) + \int \cos^2(x)dx = -sin(x)cos(x) + \int \left(1 - \sin^2(x)\right)dx = -sin(x)cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx$
Also: $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)cos(x))$

7.7.1 13.01.2009

Definition: *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ wobei I ein Intervall sei. f ist eine Regelfunktion, wenn für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$ f eingeschraenkt auf J eine Regelfunktion ist. Für kompakte Intervalle stimmt dies mit unserer früheren Definition überein.*

7.8 Uneigentliche Integrale

Definition: *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ existiert, heißt das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergent, und man setzt $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta f(x)dx$.// Analog wird $\int\limits_a^b f(x)dx$ für Regelfunktionen $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a \in \bar{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ definiert.*

<u>Beispiel:</u>

(1) Sei $s > 1$. Dann ist $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{s-1}$. Denn für $\beta > 1$ ist $\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^\beta = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{\beta^{s-1}}\right)$ und $\lim\limits_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta^{s-1}} = 0$.

(2) Für $s \leq 1$ ist $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}$ divergent, denn:

Für $s = 1$: Für $\beta > 1$ ist $\int\limits_1^\beta \frac{1}{x}dx = \ln(x)\Big|_1^\beta = \ln(\beta)$ und $\lim\limits_{\beta \to \infty} \ln(\beta) = \infty$

Für $s < 1$ erhält man wie in (1) für $\beta > 1$ $\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{\beta^{s-1}}\right)$. Aber hier: $\lim\limits_{\beta \to \infty}\left(1 - \frac{1}{\beta^{s-1}}\right) = \infty$.

Definition: *Seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Falls für alle $c \in (a,b)$ $\int\limits_a^c f(x)dx$ und $\int\limits_c^b f(x)dx$ konvergieren, so heißt $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergent.*

In diesem Fall wähle $c \in (a,b)$ und setze $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.
Diese Definition hängt nicht von c ab.

8 Der Satz von Taylor, Die komplexen Zahlen

8.1 Taylor

Definition: *Seien $f : I \to \mathbb{R}$, I ein Intervall, $a \in I$. Sei f n-mal differenzierbar in a. Setzte*

$$T_n(f,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$T_n(f,a)$ ist das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a. Wir betrachten $T_n(f,a)$ als Funktion von I nach $\mathbb{R}$.

Bemerkung: $T_n(f,a)$ hat Grad $\leq n$, und es gilt für alle $k \leq n$: $(T_n(f,a))^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

Satz 8.1 *(Taylor'sche Formel)*
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktion, und sei $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + R_{n+1}(x)$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Beweis: Durch Induktion über n:

Induktionsanfang (n=0): Es ist $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(x)dt = T_0(f,a)(x) + R_1(x)$

Induktionsschritt: Es ist

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt = -\int_a^x f^{(n+1)}(t)\left(\frac{(x-t^{(n+1)}}{(n+1)!}\right)' dt =$$

$$= -f^{(n+1)} \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + R_{n+2}(x)$$

Also ist (nach Induktionsvorraussetzung):

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f,a)(x) + R_{n+1}(x) = \\ &= T_n(f,a)(x) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + R_{n+2}(x) = \\ &= T_{n+1)}(f,a)(x) + R_{n+2}(x) \end{aligned}$$

□

8.2 Lagrange'sche Form des Restglieds

Korollar: *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin seien $a, c \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen a und x mit*

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beweis: Sei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

(Wie in Satz 8.1). Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert dann ein ξ zwischen a und x, so dass gilt:

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(x)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = -f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Also folgt Behauptung aus Satz 1.

□

Korollar: *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin sei $a \in I$. Dann gibt es eine stetige Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = T_n(f,a) + r(a)(x-a)^n \quad \forall \quad x \in I$.*

<u>Beweis:</u> Für $n = 0$ setze $r(x) = f(x) - f(a)$. Sei also $n > 0$. Definiere $r : I \to \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^n}(f(x) - T_n(f,a)(x)) & \text{falls} \quad x \neq a \\ 0 & \text{falls} \quad x = a \end{cases}$$

Offenbar ist $f(x) = T_n(f,a)(x) + r(x)(x-a)^n$ für $x \in I$ (denn: $T_n(f,a)(a) = f(a)$) Weiterhin ist r stetig in $I \backslash \{a\}$.

8.2.1 15.01.2009

Korollar: *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin sei $a \in I$. Dann gibt es eine stetige Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ mit $r(n) = 0$ und $f(x) = T_n(f,a)(x) + r(x) \cdot (x-a)^n \ \forall x \in I$.*

<u>Beweis:</u> Sei also $n > 0$. Definiere $r : I \to \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^n}(f(x) - T_n(f,a)(x)) & \text{falls } x \neq a \\ 0 & \text{falls } x = a \end{cases}$$

Offenbar ist $f(x) = T_n(f,a)(x) + r(x) \cdot (x-a)^n$ für $x \in I$. Weiterhin ist r stetig in $I \backslash \{a\}$. Wegen $r(a) = 0$ müssen wir also nur noch zeigen, dass r in a stetig ist. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $I \backslash \{a\}$,
$r(x_n) = \frac{1}{(x_n-a)^n}(f(x_n) - T_n(f,a)(x_n)) = \frac{1}{(x_n-a)^n}(f(x_n) - T_{n-1}(f,a)(x_n) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x_n - a)^n) = \frac{1}{(x_n-a)^n}(f(x_n) - T_{n-1}(f,a)(x_n)) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ Nach obigem Korollar $\exists \xi$ zwischen a und x_n mit $f(x_n) - T_{n-1}(f,a)(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \cdot (x_n - a)^n$. Dann ist $r(x_n) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\xi_n) - f^{(n)}(a))$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a$. Da $f^{(n)}$ stetig ist, folgt also $\lim\limits_{n\to\infty} r(x_n) = 0$.

□

8.3 Extrema bei mehrfacher Ableitung

Satz 8.2 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, wobei I ein Intervall sei und $n \geq 2$. Sei $a \in \mathring{I}$ und es gelte $f^{(k)}(a) = 0$ für $1 \leq k < n$, aber $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$, so besitzt f in a ein lokales Minimum.

(b) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$, so besitzt f in a ein lokales Maximum.

(c) Ist n ungerade, so besitzt f in a ein kein Extremum.

Beweis: Nach Vorraussetzung ist $T_{n-1}(f, a) = f(a)$.
zu (a) Sei n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$. Wegen $f^{(n)}$ stetig und $a \in \mathring{I}$ $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq I$ und $f^{(n)}(b) > 0\ \forall b \in U_\varepsilon(a)$. Sei nun $x \in U_\varepsilon(a),\ x \neq a$. Nach dem ersten Korollar zu Satz 8.1 $\exists \xi$ zwischen a und x mit $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$. Dann ist aber $f^{(n)}(\xi) > 0$ und wegen n gerade ist auch $(x-a)^n > 0$. Also $f(x) > f(a)$.
zu (b) Wende (a) auf $-f$ an.
zu (c) Sei nun n ungerade. Sei œ$f^{(n)}(a) > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass $x_0, x_1 \in U_\varepsilon(a) \cap I$ mit $f(x_0) < f(a) < f(x_1)$. Wegen $f^{(n)}$ stetig in a und $a \in \mathring{I}$ $\exists \delta > 0$ mit $\delta \leq \varepsilon, U_\delta(a) \leq I$ und $f^{(n)}(b) > 0\ \forall b \in U_\delta(a)$. Wähle $x_0, x_1 \in U_\delta(a)$ mit $x_0 < a < x_1$. Dann $\exists \xi_i$ zwischen a und x_i mit $f(x_i) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}(x_i - a)^n$. Dann gilt $f^{(n)}(\xi_i) > 0$. Wegen n ungerade ist aber $(x_0 - a)^n < 0$ und $(x_1 - a)^n > 0$. Also $f(x_0) < f(a) < f(x_1)$.

8.4 Die komplexen Zahlen

Definiere auf $\mathbb{R}^2$ eine Addition + und eine Multiplikation $\cdot$. Durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit diesen Operationen. Elemente von $\mathbb{C}$ heißen komplexe Zahlen. $\mathbb{C}$ ist mit den ausgezeichneten Elementen $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ ein Körper.
Wir zeigen nur (K8) multiplikatives Inverses. Sei $(a, b) \neq (0, 0)$. Setze $\lambda = a^2 + b^2$. Dann ist $\lambda \neq 0$ und $(a, b) \cdot (\frac{a}{\lambda}, -\frac{b}{\lambda}) = (\frac{a^2}{\lambda} + \frac{b^2}{\lambda}, -\frac{ab}{\lambda} + \frac{ab}{\lambda}) = (\frac{a^2+b^2}{\lambda}, 0) = (1, 0)$

Wir identifizieren nun $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, 0)$. Wegen $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ und $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$ ist dies sinnvoll. Weiterhin setzen wir $i := (0, 1)$. Dann gilt: $(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$. Jede komplexe Zahl lässt sich also eindeutig schreiben als $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. a ist der Realteil von z, b ist der Imaginärteil. Bezeichnung: $a = Re(z), b = Im(z)$. Es ist $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$.
Dies motiviert auch die Definition der Multiplikation. Es ist $(a + bi)(c + id) = ac + i^2bd + iad + ibc = ac - bd + i(ad + bc)$.

Definition: *Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\bar{z} = a - ib$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Hierfür gilt:*

(a) $\bar{\bar{z}} = z$

(b) $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

(c) $z_1 \bar{z}_2 = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

Beweis: (a), (b) sind klar.
zu (c) $(a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_2)$. Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ setze $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Betrag von z). Es gilt:

(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(d) Für $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Ohne Beweis geben wir an (Fundamentalsatz der Algebra):
Jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + ... + a_0$ mit $a_0, ...a_n \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1, a_n \neq 0$, besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

8.4.1 20.01.2009

Da wir in $\mathbb{C}$ eine Betragsfunktion haben, können wir völlig analog zu $\mathbb{R}$ definieren, wann eine Folge bzw Reihe komplexer Zahlen konvergent ist. Es gibt dann auch das Cauchy-Kriterium.

Bemerkung: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \in \mathbb{R}$ und sei r ihr Konvergenzradius. Ist dann $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent.

Beweis: Setze $s = |z|$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ absolut konvergent. Nach dem Cauchy-Kriterium folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergent ist, dann $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left|a_k z^k\right|$.

□

Somit können wir die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Setze $\exp(z) = e^z$.

8.4.2 Eulersche Formel

Satz 8.3 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$*

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

□

Korollar:

(a) $e^{2\pi i} = 1$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ *gilt* $|e^{ix}| = 1$

Beweis:

zu (a) $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

zu (b) $|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$

$\square$

Bemerkung: Genau wie in $\mathbb{R}$ läßt sich auch für komplexe Zahlen w, z zeigen: $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$.
Mit Satz 3 erhält man hierraus die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus wie folgt: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\
&= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) \\
&= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))
\end{aligned}$$

Also:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

8.4.3 Polarkoordinaten

Satz 8.4 *Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ existieren eindeutig $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Dabei $r = |z|$.*

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Zur Existenz: Setze $\omega = \frac{z}{|z|}$. Dann ist $|\omega| = 1$. Sei $\omega = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Somit ist $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Es ist $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ und cos ist stetig. Also existiert $\psi \in [0, \pi]$ mit $\cos(\psi) = a$.

1.Fall: $b \geq 0$

Dann ist $b = \sqrt{1 - \cos^2(\psi)} = \sin(\psi)$, da $sin(\psi) \geq 0$. Somit ist $\omega = \cos(\psi) + i\sin(\psi) = e^{i\psi}$ und $z = |z| \cdot e^{i\psi}$.

2.Fall: $b < 0$

Dann ist $|a| < 1$, also $\psi > 0$. Weiterhin ist $b = -\sin(\psi)$. Also $a = \cos(-\psi)$, $b = \sin(-\psi)$. Setze $\varphi = -\psi + 2\pi$. Dann $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $\omega = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = e^{i\varphi}$ und $z = |z|e^{i\varphi}$.

Eindeutigkeit folgt sofort aus dem Verlauf von $\sin, \cos$

9 Vektorräume

Definition: *Sei K ein Körper. Ein* <u>*K-Vektorraum*</u> *(oder Vektorraum über K) ist ein Tripel* $(V, +, \cdot)$ *mit V Menge und*

$$+ : V \times V \to V$$
$$(v, w) \to v + w \qquad \textit{(Vektoraddition)}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V$$
$$(\lambda, v) \to \lambda \cdot v \qquad \textit{(Skalarmultiplikation)}$$

Mit den Eigenschaften:

(V1) $(V, +)$ *ist eine abelsche Gruppe, d.h.*

1. *Für alle* $u, v, w \in V$ *gilt:*
   $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Assoziativität)*
2. *Es existiert* $\mathcal{O} \in V$ *mit*
   (a) *für alle* $v \in V$ *gilt:* $v + \mathcal{O} = v$ *(neutrales Element)*
   (b) *für alle* $v \in V$ *existiert* $w \in V$ *mit* $v + w = \mathcal{O}$ *(inverses Element)*
3. *Für alle* $u, w \in V$ *gilt* $v + w = w + v$ *(Kommutativität)*

(V4) Für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ *gilt*

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = \mu \cdot (\lambda \cdot v)$

2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$

3. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

4. $1 \cdot v = v$

Schreibe auch λv statt $\lambda \cdot v$.
Elemente von V heißen Vektoren.
Das Element $\mathcal{O}$ in (V1)(2) ist eindeutig bestimmt. Es ist der Nullvektor. Ebenso ist das Element w in (V1)(2)(b) durch v eindeutig bestimmt und wird mit $-v$ bezeichent. Setze $v - w = v + (-w)$.
Die Elemente des Körpers K heißen Skalare. Wegen (V2)(1) können wir bei Skalarmultiplikation die Klammern weglassen, d.h. wir schreiben $\lambda\mu v$ statt $\lambda \cdot (\mu v)$.
Wir sagen auch: V ist ein K-Vektorraum.

Standardbeispiel: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.
Sei $K^n = \{(a_1, \dots, a_n) \big| a_1, \dots, a_n \in K\}$.
Definiere + auf K^n durch:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

Außerdem sei $\cdot : K \times K^n \to K^n$ definiert druch

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

Man rechnet leicht nach, dass K^n mit $+, \cdot$ ein K-Vektorraum ist. Natürlich ist $\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$.
Bemerkung: $K^0 = \{\emptyset\}$

Weiteres Beispiel: Sei $V = \{f \big| f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\text{ist stetig}\}$. V ist mit $+, \cdot$ Vektorraum.

9.1 22.01.2009

Bemerkung: Sei V ein K-Vektorraum.

(a) $0 \cdot v = 0 \; \forall \; v \in V$

(b) $\lambda \cdot 0 = 0 \; \forall \; \lambda \in K$

(c) für $\lambda \in K, v \in V$ und $\lambda \neq 0, v \neq 0$ ist $\lambda v \neq 0$

(d) $(-1)v = -v \; \forall \; v \in V$

Beweis: zu (a): $0 \cdot v = (0+0)v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Also $0 \cdot v = 0$.
zu (b): $\lambda \cdot 0 = \lambda(0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$. Also $\lambda \cdot 0 = 0$.
zu (c): Sei $\lambda \neq 0$ aber $\lambda \cdot v = 0$. Zu zeigen: $v = 0$. Aber $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \cdot \lambda)v = \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot v = \lambda^{-1} \cdot 0 \underset{(b)}{=} 0$
zu (d): $v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1)v = (1-1)v = 0 \cdot v \underset{(a)}{=} 0$. Also $(-1)v = -v$.

$\square$

9.2 Unterverktorräume

Definition: *Sei V ein K-VR, $U \subseteq V$. U ist ein Untervektorraum von V, wenn gilt: $(U, +_U, \cdot_U)$ ist K-VR, wobei $+_U$ und $\cdot_U$ die Einschränkungen von $+, \cdot$ sind, d.h. für $v, w \in U, \lambda \in K$:*

$$v +_U w = v + w$$

$$\lambda \cdot_U v = \lambda \cdot v$$

Satz 9.1 *Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(1) U ist ein Untervektorraum von V.

(2) Es gelten

(UV1) $U \neq \emptyset$

(UV2) $\forall v, w \in U$ gilt $v + w \in U$

(UV3) $\forall v \in U$ und $\lambda \in K$ gilt $\lambda v \in U$

Beweis: (1) $\to$ (2) klar
(2) $\to$ (1) Aus (UV3) folgt auch $\forall v \in U$: $-v = (-1)v \in U$.
Also auch $0 \in U$, da für $v \in U: \quad 0 = v + (-v) \in U$. Somit folgt leicht die Behauptung.

$\square$

Beispiel:

(1) $\{0\}$ und V sind UVRs.

(2) Gerade durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$, d.h. sei $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$. Dann $U = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ UVR von $\mathbb{R}^2$.

Lemma 9.2 *Sei V K-VR. Sei $\mathfrak{M} \neq 0$ mit $\forall U \in \mathfrak{M}$ ist U UVR von V. Setze $W = \bigcap \mathfrak{M} = \{v | \forall U \in \mathfrak{M}, v \in U\}$. Dann ist W UVR von V.*

Beweis: zu (UV1) $\forall U \in \mathfrak{M}, 0 \in U$. Also $0 \in W$, d.h. $W \neq \emptyset$.
zu (UV2) Seien $v, w \in W$. Dann $\forall U \in \mathfrak{M}: \ v + w \in U$. Also $v + w \in W$.
zu (UV3) Seien $v \in W, z \in K$. Dann $\forall U \in W: \ \lambda u \in U$. Also $\lambda u \in W$.

$\square$

9.3 Der Span

Definition: *Sei $E \subseteq V$. Setze* $\mathrm{Span}(E) = \bigcap\{u | E \subseteq U, U \text{ ist UVR von } V\}$.*(Beachte, dass V UVR von V und $E \subseteq U$).*
Also gilt

(1) $\mathrm{Span}(E)$ *ist UVR von V.*

(2) Falls U UVR von V mit $E \subseteq U$, so $\mathrm{Span}(E) \subseteq U$

oder: $\mathrm{Span}(E)$ *ist der kleinste UVR von V der E umfasst.*

Bemerkung: Ist $E = \emptyset$, so ist $\mathrm{Span}(E) = \{0\}$

Satz 9.3 *Sei V K-VR, $E \subseteq V$, $E \neq \emptyset$. Dann gilt* $\mathrm{Span}(E) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | v_1, \cdots, v_n \in E, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K, n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Setze $W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n | v_1, \cdots, v_n \in E, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K, n \in \mathbb{N}\}$. $W \subseteq \mathrm{Span}(E)$, da $\mathrm{Span}(E)$ UVR und $E \subseteq \mathrm{Span}(E)$. Noch zu zeigen $\mathrm{Span}(E) \subseteq W$. Offenbar gilt $E \subseteq W$, da für $v \in E, v = 1v \in W$. Also genügt zu zeigen, dass W ein UVR von V ist. Dies folgt leicht aus Satz 9.1.

□

Sei im Folgenden V immer ein K-VR.

9.4 Linearkombination, Erzeugendensysteme

Definition: *Seien $v_1, \cdots, v_n \in V, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dann heißt $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ eine Linearkombination von $v_1, \cdots, v_n$. Also* $\mathrm{Span}(E)$ *=Menge aller Linearkombinationen von Elemente von E.*

Definition: *Sei $E \subseteq V$. E ist ein Erzeugendensystem von V, wenn* $\mathrm{Span}(E) = V$. *Statt $\{v_1, \cdots, v_n\}$ Erzeugendensystem von V, sage auch $v_1, \cdots, v_n$ ist Erzeugendensystem von V.*

Definition: *Sei $A \subseteq V$. A ist linear unabhängig, wenn gilt: sind $v_1, \cdots, v_n \in A$ paarweise verschieden, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$, und ist $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, so $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ist A nicht linear unabhängig, so ist A linear abhängig.*

Bemerkung: Ist A endlich, etwa $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ mit $a_1, \cdots, a_n$ paarweise verschieden, so: A ist linear unabhängig, wenn gilt: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$, so $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Sage dann auch $v_1, \cdots, v_r$ sind linear unabhängig.
Beispiel:

(1) Ist $v \neq 0$, so ist $\{v\}$ linear unabhängig, denn: falls $\lambda v = 0$, so wegen $v \neq 0$ $\lambda = 0$.

(2) $V = \mathbb{R}^2$. $\{(0,1),(1,0)\}$ ist linear unabhängig denn: Sei $\lambda(0,1)+\mu(1,0)=0$. Dann ist $(\lambda,\mu)=(0,0)$. Also $\lambda=\mu=0$.

9.4.1 27.01.2009

Lemma 9.4 *Sei V K-VR, $E \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(1) E ist linear unabhängig

(2) $\forall v \in E : v \notin \mathrm{Span}(E \backslash \{v\})$

(3) Sind $v_1, \cdots, v_n \in E$ paarweise verschieden, $\lambda_i, \mu_i \in K$, so: falls $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, so $\lambda_i = \mu_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$

Beweis: (1) $\rightarrow$ (2) indirekt. Sei (2) nicht erfüllt. Dann $\exists v \in E$ und $v_1, \cdots, v_n \in E \backslash \{v\}$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Also $0 = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Somit ist E nicht linear unabhängig, denn $-1 \neq 0$.
(2) $\rightarrow$ (3) indirekt:
Seien also $v_1, \ldots, v_n \in E$ paarweise verschieden und $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$. Aber etwa $\lambda_k \neq \mu_k$. Dann $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = -(\lambda_k - \mu_k) v_k = (\mu_k - \lambda_k) v_k$. Setze nun $\varrho = (\mu_k - \lambda_k)$. Also $\varrho \neq 0$. Somit $v_k = \varrho^{-1}(\lambda_i - \mu_i) v_i$. Also $v_k \in \mathrm{Span}(E \backslash \{v_k\})$, d.h. (2) ist nicht erfüllt.
(3) $\rightarrow$ (1). Sei (3) erfüllt. Sei dann $v_1, \ldots, v_n \in E$ paarweise verschieden und $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, so $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 v_1 + \ldots + 0 v_n$. Also nach (3) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

□

9.5 Basis

Definition: *Sei $B \subseteq V$.*
B ist eine Basis von V genau dann, wenn B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Beispiel: K^n

Für $1 \leq i \leq n$ sei $e_i = (0, \ldots, 0, 1(i - te\, Stelle), 0, \ldots, 0)$ Setze $B = \{e_i, \ldots, e_n\}$
B ist Erzeugendensystem von K^n, denn sei $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ beliebig. Dann gilt $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n)$, B ist l.u. Dann seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Ist $\lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_ne_n = 0$, so $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ Also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Somit ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von K^n. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist die kanonische Basis von K^n.

Satz 9.5 *Sei V ein K-VR, $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(1) B ist Basis von V

(2) B ist minimales Erzeugendensystem von V, d.h.

(i) B ist Erzeugendensystem von V und

(ii) Falls $B' \subseteq B$, $B' \neq B$, so ist B' kein Erzeugendensystem von V

(3) B ist maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h.

(i) B ist l.u. und

(ii) Falls $B \subseteq \bar{B} \subseteq V$, $B \neq \bar{B}$, so ist $\bar{B}$ linear abhängig

Beweis: (1) → (2)
Sei (1) erfüllt. (2)(i) gilt nach Definition.
zu (2)(i): Sei $B' \subseteq B$, $B' \neq B$. Wähle $v \in B \backslash B'$. Wegen B l.u. gilt nach Lemma 9.4, dass $v \notin \mathrm{Span}(B \backslash \{v\})$. Wegen $B' \subseteq B \backslash \{v\}$ ist aber $\mathrm{Span}(B') \subseteq \mathrm{Span}(B \backslash \{v\})$. Also $v \notin \mathrm{Span}(B')$ d.h. B' ist kein Erzeugendensystem von V.
(2) → (3) Sei (2) erfüllt:
zu (3)(i)
Anm: B ist l.a. dann existiert nach Lemma 9.4 ein $v \in B$ mit $v \in \mathrm{Span}(B \backslash \{v\}) = \mathrm{Span}(B \backslash \{v\})$. Also $V = \mathrm{Span}(B) \subseteq \mathrm{Span}(\mathrm{Span}(B \backslash \{v\})) = \mathrm{Span}(B \backslash \{v\})$. Also ist $B \backslash \{v\}$ ein Erzeugendensystem von V, was ein Wiederspruch zu (2)(ii) ist.
zu (3)(ii): Sei $B \subseteq \bar{B} \subseteq V$, $B \neq \bar{B}$. Sei $v \in \bar{B} \backslash B$. Wegen B Erzeugendensystem ist also $v \in \mathrm{Span}(B) \subseteq \mathrm{Span}(\bar{B} \backslash \{v\})$. Also ist nach Lemma 9.4 $\bar{B}$ l.a.

(3) $\rightarrow$ (1): Sei (3) erfüllt: Dann ist B l.u. Noch zu zeigen: B ist Erzeugendensystem von V, d.h. $V \subseteq \text{Span}(B)$. Sei also $v \in V$. Ist $v \in B$, so natürlich $v \in \text{Span}(B)$. Sei also $v \notin B$. Dann ist nach (3) $B \cup \{v\}$ l.a. Es existieren also $v_1, \ldots, v_n \in B$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$, aber $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) \neq (0, \ldots, 0)$. Wegen B l.u. ist aber dann $\lambda \neq 0$. Also $v = -\lambda^{-1}\lambda_1 v_1 + \ldots - \lambda^{-1}\lambda_n v_n$, d.h. $v \in \text{Span}(B)$

$\square$

Korollar: *Sei E ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann existiert $B \subseteq E$ mit B Basis von V.*

Beweis: Wähle $B \subseteq E$ von min. Anzahl mit B Erzeugendensystem von V, also B Basis von V.

Bemerkung: Mit Hilfe des Zornschen Lemmas folgt, dass jeder Vektorraum eine maximale linear unabhängige Teilmenge, also nach Satz 9.5 eine Basis besitzt.

9.6 Austauschlemma

Lemma 9.6 *Sei V K-VR. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V mit $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden. Sei $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i \in K$. Sei $\lambda_k \neq 0$. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.*

Bemerkung: Sei o.E. $k = 1$. Setze $B = \{w, v_2, \ldots, v_n\}$

(1) B ist l.u.

Beweis: Sei $0 = \mu w + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$.

Wir zeigen: $\mu = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$. Nun ist $0 = \mu(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n = \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2)v_2 + \ldots + (\mu\lambda_n + \mu_n)v_n$. Wegen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u. also $\mu\lambda_1 = \mu\lambda_2 + \mu_2 = \ldots = \mu\lambda_n + \mu_n = 0$. Wegen $\lambda_1 \neq=$ ist aber dann $\mu = 0$. Also auch $\mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$, da $\mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n = 0$.

(2) B ist Erzeugendensystem von V

Beweis: Sei $v \in V$. Wegen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis V, existiert dann $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit $v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$. Nach Voraussetzung ist aber $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, also $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w + (\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1}) v_2 + \ldots + (\mu_n - \frac{\mu_1 \lambda_n}{\lambda_1}) v_n$. Also $v \in \mathrm{Span}(B)$.

□

9.7 Steinerscher Austauschsatz (29.01.09)

Satz 9.7 *Sei V ein K-VR. Sei $\{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V mit $v_1, \cdots, v_n$ paarweise verschieden. Sei $\{w_1, \cdots, w_m\}$ linear abhängig mit $w_1, \cdots, w_m$ paarweise verschieden. Dann ist $m \leq n$, und $\exists i_1, \cdots, i_m \in \{1, \cdots, n\}$ paarweise verschieden mit $(\{v_1, \cdots, v_n\} \backslash \{v_{i1}, \cdots, v_{im}\}) \cup \{w_1, \cdots, w_m\}$ ist Basis von V.*

Beweis: Induktion über m:

$m = 0$: trivial

$m \to m + 1$: Sei $\{w_1, \cdots, w_{m+1}\}$ l.u. mit $w_1, \cdots, w_m$ paarweise verschieden. Da auch $\{w_1, \cdots, w_m\}$ l.u. ist, existieren nach Induktionsvorraussetzung $i_1, \cdots, i_m \in \{1, \cdots, n\}$ paarweise verschieden mit $(\{v_1, \cdots, v_n\} \backslash \{v_{i_1}, \cdots, v_{i_m}\}) \cup \{w_1, \cdots, w_m\}$ ist Basis von V.

Sei œ$i_j = j$ für $1 \leq j \leq m$ (sonst numeriere um). Also ist $B = \{w_1, \cdots, w_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V. Also $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ mit $w_m + 1 = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \lambda_n v_n$. Wäre nun $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, so wäre $w_{m+1} \in \mathrm{Span}(\{w_1, \cdots, w_m\})$ im Widerspruch zu $\{w_1, \cdots, w_m\}$ l.u.

Also ist $m + 1 \leq n$, und $\exists k$ mit $m + 1 \leq k \leq n$ und $\lambda_k \neq 0$. Sei œ$k = m + 1$(sonst numeriere um). Dann ist nach Lemma 9.6 $\{w_1, \cdots, w_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V.

□

Korollar: *Sei B eine endliche Basis von V. Ist B' eine Basis von V, so ist B' endlich und Anzahl von B' =Anzahl von B.*

Beweis: Aus Satz 9.7 folgt Anzahl von B' ≤Anzahl von B. Anzahl von B ≤Anzahl von B'.

$\square$

Definition: $dim_k(v) = \begin{cases} n & \textit{falls V eine Basis mit n Elementen besitzt} \\ \infty & \textit{falls V keine endliche Basis besitzt} \end{cases}$

V ist <u>*endlich-dimensional*</u>*, falls* $dim_k(V) \neq \infty$*. Schreibe auch* $dim(V)$ *statt* $dim_k(V)$*.*

<u>Beispiel:</u>

(1) $dim(K^n) = n$

(2) Ist $V = \{f | f \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$, so $dim(V) = \infty$. Denn $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n(x) = x^n$ ist l.u.

<u>Bemerkung:</u> Man kann allgemein zeigen:
Seien B, B' zwei Basen von V. Dann existiert die Bijektion $f : B \to B'$.
Weitere wichtige Folgerungen aus dem Austauschsatz:
(Basisergänzungssatz)
Sei V endlichdimensional. Ist dann $E \subseteq V$ l.u., so existiert die Basis B mit $E \subseteq B$.
Außerdem gilt:
Ist U UVR von V, so $dim(U) \leq dim(V)$.

$\square$

<u>Bemerkung:</u> Seien U, W UVR'e von V. Dann ist $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$ ein UVR von V. $U + W$ ist der kleinste UVR Z von V mit $U \cup W \subseteq Z$.

9.8 Dimensionsformel

Satz 9.8 *Sei V endlich-dimensionaler K-VR. Seien* U, W *Vektorräume von V. Dann gilt:* $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$*.*

<u>Beweis:</u> Sei $\{v_1, \cdots, v_m\}$ eine Basis $U \cap W$ mit $v_1, \cdots, v_m$ paarweise verschieden. Nach Basisergänzung $\exists u_1, \cdots, u_k \in U \backslash (u \cap w)$ paarweise verschieden $\{v_1, \cdots, v_m,$

$u_1, \cdots, u_k\}$ Basis von U und $w_1, \cdots, w_l \in W \backslash (u \cap w)$ paarweise verschieden $\{v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_l\}$ Basis von W. Setze $B = \{v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_k, w_l, \cdots, w_l\}$. Wir werden zeigen $(*)$: B ist Basis von $U + W$. Dies genügt, denn B hat $m+k+l$-viele Elemente. Aber $dim(U) = m+k, dim(W) = m+l, dim(U \cap W) = m$. Also folgt aus $(*)$ $dim(U + W) > m + k + l = (m + k) + (m + l) - m = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.
zum Beweis von $(*)$:

(i) B ist Erzeugendensystem $U + W$, denn: $U, W \subseteq \text{Span}(B)$.

(ii) B ist l.u., denn: Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k, \eta_1, \cdots, \eta_l \in K$ mit

 (1) $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k + \eta_1 w_1 + \cdots + \eta_l w_l = 0$

 (2) Setze $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_k u_k \in U$. Aber auch $u = -\eta_1 w_1 - \cdots - \eta_l w_l \in W$. Also $u \in U \cap W$. Somit $\exists \lambda'_1, \cdots, \lambda'_m \in K$ mit

 (3) $u = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_m v_m$ (da $\{v_1, \cdots, v_m\}$ Basis von $U \cap W$).

Da $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_k\}$ l.u., folgt aber aus (2),(3), dass $\lambda_1 = \lambda'_1, \cdots, \lambda'_m = \lambda_m, \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0$.
Dann folgt aber wegen $\{v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_l\}$ l.u. aus (1), dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 = \mu_1 = \cdots = \mu_l$.

□

10 Lineare Abbildungen

Definition: *Seien V, W K-VR und $f : V \to W$. f ist <u>linear</u>, wenn gilt:*

(L1) $\forall v_1, v_2 \in V\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(L2) $\forall v \in V$ *und* $\lambda \in U\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Bemerkung: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt $f(0) = 0$ und $f(-v) = -f(v)\ \forall v \in V$
Beweis: $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$.
$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v)$

$\square$

Bemerkung: Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m)$.

10.1 Eigenschaften 03.02.2009

Seien V, W K-VR'e, $f, g : V \to W$.
Definiere $f + g : V \to W$ durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ für $v \in V$. Sei $\lambda \in K$. Definiere $\lambda f : V \to W$ durch $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ für $v \in V$.

Lemma 10.1 *Seien V, W K-VR'e, $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen. Weiterhin sei $\lambda \in K$. Dann gelten:*

(a) $f + g$ ist linear

(b) λf ist linear

Beweis: einfaches Nachrechnen:
$(f + g)(v_1 + v_2) = f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) = (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2)) = (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2)$

$\square$

Bemerkung: Sei $\hom(V, W) = \{f | f : V \to W \text{ linear}\}$. $\hom(V, W)$ ist mit obiger Addition und Skalarmultiplikation ein K-VR.

Lemma 10.2 *Seien V_1, V_2, V_3 K-VR'e. Seien $g : V_1 \to V_2$ und $f : V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen. Dann ist $f \circ g : V_1 \to V_3$ wieder eine lineare Abbildung.*

Beweis: einfaches Nachrechnen.

$\square$

Satz 10.3 *Seien V, W K-VR'e. Weiterhin sei $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V mit $v_1, \cdots, v_n$ paarweise verschieden. Seien $w_1, \cdots, w_2$ beliebige Vektoren aus W (nicht notwendig paarweise verschieden). Dann gibt es genau eine Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i \ \forall 1 \leq i \leq n$.*

Beweis: Eindeutigkeit: Seien $f, g : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i = g(v_i) \forall 1 \leq i \leq n$. Sei $v \in V$ beliebig. Wegen B Erzeugendensystem $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = \lambda_1 g(v_1) + \cdots + \lambda_n g(v_n) = g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = g(v)$.
Existenz: Definiere f wie folgt: Sei $v \in V$. Wegen B Basis existieren dann eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Setze $f(v) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$. f ist linear, denn: Seien $u, v \in V$. Sei $u = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n, v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Dann gilt $u + v = (\mu_1 + \lambda_1)v_1 + \cdots + (\mu_n + \lambda_n)v_n$. Also nach Def. $f(w+v) = (\mu_1+\lambda_1)w_1+\cdots+(\mu_n+\lambda_n)w_n = (\mu_1 w_1+\cdots+\mu_n w_n)+(\lambda_1 w_1+\cdots+\lambda_n w_n) = f(u) + f(v)$.
Sei weiterhin $\lambda \in K, v \in V$. Sei wieder $v = v_1\lambda_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Dann gilt $\lambda v = (\lambda\lambda_1)v_1+\cdots+(\lambda\lambda_n)v_n$. Also $f(\lambda v) = (\lambda\lambda_1)w_1+\cdots+(\lambda\lambda_n)w_n = \lambda(\lambda_1 w_1+\cdots+\lambda_n w_n) = \lambda f(v)$.

□

Bemerkung: Es gibt auch ein Analogon zu Satz 10.3 im mehrdimensionalen Fall.

10.2 Kern und Bild

Definition: *Sei $f : V \to W$ linear. Setze*

$\ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$ *Kern von f*

$\mathrm{bi}(f) = \{f(v) | v \in V\}$ *Bild von f*

Satz 10.4 *Seien V, W K-VR'e, $f : V \to W$ linear.*

(a) $\ker(f)$ *ist UVR von V*

(b) $\mathrm{bi}(f)$ *ist UVR von W*

Beweis: zu (a)

(UV1) $0 \in \ker(f)$

(UV2) Seien $v_1, v_2 \in \ker(f)$. Dann ist $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$, Also $v_1 + v_2 \in \ker(f)$.

(UV3) Seien $v \in \ker(f), \lambda \in K$. Dann ist $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda \cdot v \in \ker(f)$.

zu (b)

(UV1) $\mathrm{bi}(f) \neq \emptyset$, da $V \neq \emptyset$

(UV2) Seien $w_1, w_2 \in \mathrm{bi}(f)$. Dann $\exists v_1, v_2 \in V$ mit $w_1 = f(v_1)$ und $w_2 = f(v_2)$. Dann ist $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \mathrm{bi}(f)$

(UV3) Seien $w \in \mathrm{bi}(f), \lambda \in K$ Dann $\exists v \in V$ mit $w = f(v)$. Also $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in \mathrm{bi}(f)$

□

10.3 Injektivität

Satz 10.5 *Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt: f ist injektiv genau dann, wenn* $\ker(f) = \{0\}$.

Beweis: $\Rightarrow$ trivial.
$\Leftarrow$ Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$. Dann ist $0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$. Also ist $v_1 - v_2 \in \ker(f)$. Somit da $\ker(f) = \{0\}$: $v_1 - v_2 = 0$, d.h. $v_1 = v_2$.

□

Lemma 10.6 *Sei $f : V \to W$ linear. Sei B eine Basis von V. Setze $B' = \{f(v) | v \in B\}$. Dann ist* $\mathrm{bi}(f) = \mathrm{Span}(B')$.

Beweis: „$\supseteq$“ trivial, da $B' \subseteq \mathrm{bi}(f)$ und $\mathrm{bi}(f)$ ist UVR von W.
„$\subseteq$“ Sei $w \in \mathrm{bi}(f)$. Dann $\exists v \in V$ mit $w \in f(v)$. Hierzu $\exists v_1, \cdots, v_n \in B$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Also $w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \in \mathrm{Span}(B')$.

□

Korollar: *Seien $f : V \to W$ linear, B Basis von V. Dann gilt: f ist injektiv genau dann, wenn $f[B]$ ist Erzeugendensystem von W.*

Satz 10.7 *Seien $f : V \to W$ linear. Sei $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V mit $v_1, \cdots, v_n$ paarweise verschieden. Setze $w_i = f(v_i)$. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist injektiv

(2) $w_1, \cdots, w_n$ sind paarweise verschieden und $\{w_1, \cdots, w_n\}$ ist l.u.

Beweis: (1) $\to$ (2) Wegen f injektiv sind $w_1, \cdots, w_n$ paarweise verschieden. Sei nun $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0$ mit $\lambda_i \in K$. Dann ist $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = 0$. Wegen f injektiv also $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Wegen B Basis also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
(2) $\to$ (1) Zeige $\ker(f) = \{0\}$. Sei also $f(v) = 0$. Sei $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Dann $0 = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$. Wegen (2) also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Also $v = 0$.

□

Korollar: *Vorraussetzungen wie oben. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist bijektiv

(2) $w_1, \cdots, w_n$ sind paarweise verschieden und $\{w_1, \cdots, w_n\}$ ist Basis von W.

Beweis: Mit Satz 5.7.

□

10.4 Dimension von V 05.02.2009

Satz 10.8 *Seien V,W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Dann gilt*

$$\dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{bi}(f))$$

<u>Bemerkung:</u> Sei $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von $\mathrm{bi}(f)$ mit $\{w_1, \ldots, w_n\}$ paarweise verschieden. Also $m = \dim(\mathrm{bi}(f))$. Sei $f(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq m$. Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von $\ker(f)$ mit $u_1, \ldots, u_k$ paarweise verschieden. Dann ist $\dim(\ker(f)) = k$. Natürlich gilt $u_i \neq v_j$ für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq m$. Setze $B = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m\}$. Wir zeigen:
(∗) B ist Basis von V
Dann sind wir fertig, denn dann:

$$\dim(V) = \text{Anzahl von } B = k + m = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{bi}(f))$$

Zum Beweis von (∗):

(i) B ist Erzeugendensystem von V, denn: Sei $v \in V$. Dann exisitieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ mit $f(v) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m)$ Setze $v' = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$. Also ist $f(v) = f(v')$, d.h. $0 = f(v) - f(v') = f(v - v')$. Somit ist $v - v' = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k$. Also $v = (v - v') + v' \in \mathrm{Span}(B)$

(ii) B ist l.u., denn: Seien $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$. Dann $0 = f(\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) = \mu_1 f(u_1) + \ldots + \mu_k f(u_k) + \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_m f(v_m) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m$ Wegen $\{w_1, \ldots, w_m\}$ l.u. also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ somit $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k = 0$ Wegen $\{u_1, \ldots, u_k\}$ l.u. also $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$

□

Korollar: *Sei V endlich-dimensionaler Vektrorraum und $f_V \to V$ linear. Dann sind äquivalent*

(a) f ist bijektiv

(b) f ist injektiv

(c) f ist surjektiv

Beweis:

$(a) \to (b)$ ist trivial

$(b) \to (c)$: Sei f injektiv. Dann ist $\ker(f) = \{0\}$, also $\dim(\ker(f)) = 0$. Somit $\dim V = 0 + \dim(\mathrm{bi}(f)) = \dim(\mathrm{bi}(f))$. Also $\mathrm{bi}(f) = V$, d.h. f ist surjektiv.

$(c) \to (b)$: Sei f surjektiv, d.h. $\mathrm{bi}(f) = V$. Also $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{bi}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(V)$. Somit ist $\dim(\ker(f)) = 0$, d.h. $\ker(f) = \{0\}$. Also ist f injektiv und damit insgesamt bijektiv.

$\square$

10.5 Isomorphismus

Definition:

(a) Sei $f : V \to W$ linear: f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn f bijektiv ist

(b) V,W sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.

Bemerkung:

(a) Falls $f : V \to W$ Isomorphismus, so auch $f^{-1} : W \to V$ Isomorphismus.

(b) Falls $g : V_0 \to V_1 \quad f : V_1 \to V_2$ Isomorphismen, so ist $f \circ g : V_0 \to V_2$ Isomorphismus.

Satz 10.9 *Seien V,W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann sind äquivalent:*

(1) V,W sind isomorph

(2) $\dim(V) = \dim(W)$

Beweis:

(1) $\rightarrow$ (2): Sei $f : V \rightarrow W$ Isomorphismus. Dann $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{bi}(f)) = 0 + \dim(W) = \dim(W)$

(2) $\rightarrow$ (1): Sei $n = \dim(V) = \dim(W)$. Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W. Nach Satz 10.3 existiert $f : V \rightarrow W$ linear mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Nach Korollar zu Satz 10.7 ist f bijektiv. Also ist f Isomorphismus.

$\square$

Speziell gilt also: Ist $\dim(V) = n$, so ist V isomorph zu K^n.

10.6 Geordnete Basis

Definition: *$B = b_1, \ldots, b_n)$ ist geordnete Basis von V, wenn $b_1, \ldots, b_n$ paarweise verschieden und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V. Sage einfach $(b_1, \ldots, b_n)$ ist Basis von V.*

Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Sei $v \in V$. Dann existieren eindeutig $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$. Setze $\Phi_B(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Φ_B ist der Koordinatenvektor von V bzgl. B.

Bemerkung: $\Phi_B : V \rightarrow K^n$ ist Isomorphismus mit $\Phi_B(b_i) = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 an i-ter Stelle).

A Griechisches Alphabet

α	A	Alpha	ν	N	Ny
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Omikron
δ	Δ	Delta	π, ϖ	Π	Pi
ε, ϵ	E	Epsilon	ρ, ϱ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ, ς	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ, ϑ	Θ	Theta	υ, u	Υ	Ypsilon
ι	I	Iota	ϕ, φ	Φ	Phi
κ	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	My	ω	Ω	Omega